SUR LES REFLEXIONS DES COURBES DE LAVRENTIEV

MICHEL ZINSMEISTER

(Communicated by Albert Baernstein II)

ABSTRACT. We answer a question of Semmes: A Jordan curve Γ admitting a quasiconformal reflexion, which is "conformal" near Γ in a sense given precisely by a Carleson measure condition, is necessarily rectifiable.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

L'objet de cette note est de montrer comment les résultats de [AZ, Z] permettent de répondre à une question de Semmes.

Soit Γ un quasicercle, c'est-à-dire l'image du cercle unité par une application quasiconforme de la sphère de Riemann S^2 . Ahlfors [A] a montré que les quasicercles sont précisément les ensembles de points fixes des involutions quasiconformes de la sphère qui changent l'orientation (plus précisément une telle involution est nécessairement conjuguée à la symétrie par rapport à la droite réelle). Il a également montré que si Γ contient le point à l'infini, cette reflexion peut être choisie bilipschitzienne pour la métrique euclidienne du plan.

Dire que la reflexion f est quasiconforme revient à dire, dans le cas présent (f change l'orientation), que f appartient à l'espace de Sobolev $H^1_{\text{loc}}(S^2)$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \mu \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

pour une fonction $\mu \in L^\infty(S^2)$, $\|\mu\|_\infty < 1$. Cette fonction, appelée la *dilatation* de f , mesure la déviation de la conformalité, $\mu = 0$ sur un ouvert signifiant que f y est antianalytique.

Dans [S] Semmes pose la question suivante:

Soit Γ un quasicercle du plan admettant une reflexion quasiconforme de dilatation μ telle que

(1) f est $(1 + \varepsilon)$ -bilipschitzienne,

(2) $\exists C > 0; \forall z \in \Gamma, \forall r > 0, \iint_{D(z, r)} \frac{|\mu(\zeta)|^2}{\text{dist}(\zeta, \Gamma)} d\zeta d\bar{\zeta} \leq \varepsilon r.$

Received by the editors May 11, 1992 and, in revised form, July 22, 1992.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30C62; Secondary 42B99.

Ce travail a été subventionné en partie par le contrat NSF DMS-900 34 38.

Est-il vrai que Γ est une courbe de Lavrentiev, c'est-à-dire l'image bilipschitzienne d'une droite ou d'un cercle, si ε est assez petit?

Le résultat principal de ce travail est une réponse positive à cette question. Plus précisément, nous proposons de démontrer le

Théorème 1. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que tout quasicercle admettant une réflexion quasiconforme dont la dilatation vérifie (2) avec $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ est une courbe de Lavrentiev (en particulier rectifiable).*

L'auteur tient à remercier K. Astala, J. Heinonen, et S. Semmes pour leur aide, ainsi que F. Gehring pour son invitation à l'université du Michigan où ce travail a été accompli.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Afin d'éviter les complications techniques, nous supposons la courbe Γ bornée et désignons par Ω la composante bornée de son complémentaire. Le cas général s'en déduit par des méthodes standard.

Soit φ une représentation conforme du disque unité D sur Ω ; on définit un prolongement quasiconforme de φ à la sphère de Riemann par

$$\forall z \in S^2 \setminus \overline{D}, \quad \varphi(z) = f(\psi(z)), \quad \psi(z) = \varphi(1/\bar{z})$$

(on suppose sans restriction de généralité que $f(0) = \infty$, $\varphi(0) = 0$ de sorte que $\varphi(\infty) = \infty$). L'application φ ainsi étendue conserve l'orientation et sa dilatation

$$\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \bigg/ \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

vérifie $|\nu(z)| = |\mu(\psi(z))|$, $|z| > 1$.

Si $\mathcal{U}$ est un domaine du plan, on définit comme dans [Z2] l'espace $MC(\mathcal{U})$ des mesures de Carleson sur $\mathcal{U}$ par:

$$m \in MC(\mathcal{U})$$

$$\Leftrightarrow \sup\{|m|(D(z, r))/r, \quad z \in \partial\mathcal{U}, \quad 0 < r < \text{diam}(\mathcal{U})\} = \|m\|_{MC(\mathcal{U})} < +\infty.$$

Notre première tâche va consister à estimer

$$\left\| \frac{|\nu|^2}{|z| - r} dx dy \right\|_{MC(U(r))}$$

où $U(r)$ désigne l'ouvert $\{|z| > r\}$ et r est un réel < 1 .

Soit donc $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r$ et $\rho \leq 2r$; si $\rho < 1 - r$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit α une (petite) constante positive qui sera déterminée plus tard. Alors

$$\begin{aligned} \iint_{D(z, r)} \frac{|\nu|^2(\zeta)}{|\zeta| - r} dx dy &\leq 5\alpha\rho + \iint_{D(z, \rho) \cap \{|\zeta| > 1 + \alpha(1-r)\}} \frac{|\nu|^2(\zeta)}{|\zeta| - r} dx dy \\ &= 5\alpha\rho + I(\rho). \end{aligned}$$

On pose $\Omega_r = \varphi(\{|z| < r\})$, $r' = 1/(1 + \alpha(1 - r))$, et $N(r) = \|\text{Log } \varphi'(re^{it})\|_{\text{BMO}(T)}$.

Lemme 1. *Il existe des constantes $C, K > 0$ telles que*

$$I(\rho) \leq C\sqrt{\varepsilon}\alpha^{-K}e^{CN(r)}\rho.$$

Preuve. Par le théorème de distorsion de Koebe,

$$(3) \quad \frac{|\nu|^2(\zeta)}{|\zeta| - r} \leq \frac{|\nu|^2(\zeta)}{|\zeta| - 1} \leq c \frac{|\mu(\psi(\zeta))|^2}{\text{dist}(\psi(\zeta), \Gamma)} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(\zeta) \right|.$$

On montre ensuite que

$$\left\| \frac{|\mu|^2}{\text{dist}(\cdot, \Gamma)} \right\|_{MC(\Omega(r'))} \leq C\sqrt{\varepsilon};$$

pour le voir, on teste sur les disques $D(\omega, \eta)$ avec $\omega \in \partial\Omega(r')$. Si $\eta < \sqrt{\varepsilon} \text{dist}(\omega, \Gamma)$, une estimation triviale permet de conclure. Sinon $D(\omega, \eta)$ est inclus dans un disque centré sur Γ et de rayon $2\eta/\sqrt{\varepsilon}$ et l'on conclut en appliquant (2). De (3) et de cette dernière estimation, une application du théorème principal de [Z2] permet d'obtenir

$$I(\rho) \leq C\sqrt{\varepsilon}\rho e^{CN(r')}$$

et donc le lemme 1 car le théorème de distorsion de Koebe implique

$$N(r') \leq N(r) + C \text{Log}(1/\alpha).$$

Supposons dans un premier temps que $N(r) \leq M$, une constante à déterminer. Si S_φ désigne la dérivée schwarzienne de φ et

$$S(r) = \|(r - |z|)^3 |S_\varphi(z)|^2\|_{MC(D(0, r))},$$

alors un des résultats de [AZ] implique que

$$(4) \quad S(r) \leq C \left\| \frac{|\nu|^2}{|z| - r} \right\|_{MC(U(r))} \leq C(\alpha^{-K} \sqrt{\varepsilon} e^{CM} + \alpha),$$

la deuxième inégalité découlant du lemme 1. Par un autre résultat de [AZ], il existe une constante $A > 0$ telle que $N(r) \leq A(S(r) + 1)$. Enfin, un résultat "classique" (voir, par exemple, [Z1]) affirme l'existence d'un $\beta > 0$ tel que $\varphi(D)$ est un domaine de Lavrentiev si $S(1) < \beta$.

On raisonne alors comme suit: On commence par choisir $M > 2A(1 + \beta)$ puis $\alpha < \beta/4C$ et enfin ε de sorte que le troisième membre de (4) soit $< \beta/2$.

Soit alors E l'ensemble des $r \in [0, 1)$ tels que $N(t) \leq M$ pour $t \leq r$: E est fermé non vide car N est une fonction continue qui tend vers 0 en 0. Les résultats précédents impliquent également que c'est un ouvert car, par (4) et le choix des constantes,

$$N(r) \leq M \Rightarrow S(r) < \frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad N(r) \leq \frac{M}{2}.$$

Donc $E = [0, 1)$, $S(r) \leq \beta/2$ si $r < 1$ et par conséquent $S(1) < \beta$ par le lemme de Fatou, ce qui achève la preuve du théorème.

REFERENCES

- [A] L. Ahlfors, *Quasiconformal reflections*, Acta Math. **109** (1963), 291–301.
- [AZ] K. Astala and M. Zinsmeister, *Teichmüller spaces and BMOA*, Math. Ann. **289** (1991), 613–625.

- [S] S. Semmes, *Chord-arc surfaces with small constant II: Good parameterizations*, Adv. Math. **88** (1991), 170–199.
- [Z1] M. Zinsmeister, *Représentation conforme et courbes presque lipschitziennes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **34** (1984), 29–44.
- [Z2] ———, *Les domaines de Carleson*, Michigan Math. J. **36** (1989), 213–220.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, THE UNIVERSITY OF MICHIGAN, ANN ARBOR, MICHIGAN 48109
Current address: Département de Mathématique, Université d'Orléans, BP 6749 F-45067
Orléans Cedex 2, France
E-mail address: zins@Labomath.univ-orleans.fr