RANG RÉEL DE CERTAINES EXTENSIONS

NAWFAL ELHAGE HASSAN

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

RÉSUMÉ. On montre pour toutes C^* -algebres A et J l'égalité entre les rangs réels de A et de A/J si J est essentiel dans A et isomorphe à l'algèbre des opérateurs compacts. En particulier, le rang réel de l'algèbre de Toeplitz $\mathcal{T}$ est égal à 1.

0. INTRODUCTION ET NOTATION

L. G. Brown et G. K. Pedersen [1] ont introduit le rang réel que l'on note (rr) , comme une notion non commutative de dimension pour les C^* -algèbres. En fait, ils ont montré que le rang réel d'une C^* -algèbre commutative et unitaire est égal à la dimension de recouvrement de son spectre, affirmant ainsi le principe selon lequel une C^* -algèbre est "un espace localement compact non commutatif". Ils ont aussi montré que si A est une C^* -algèbre et J est un idéal bilatère fermé dans A , alors $rr(A) = 0$ si et seulement si $rr(J) = rr(A/J) = 0$ et si tout projecteur dans A/J se relève par un projecteur dans A . On va traiter essentiellement dans cette note le comportement du rang réel par rapport à certaines suites exactes. On démontre en 1.4 que pour toute C^* -algèbre A et tout idéal bilatère fermé J dans A , on a $\text{Max}\{rr(J), rr(A/J)\} \leq rr(A)$. On prouve en 1.7 que, si A est commutative, alors on a $rr(A) = \text{Max}\{rr(J), rr(A/J)\}$, ceci équivaut au fait que, si X est un espace compact et U est un ouvert dans X , alors on a $\dim(X) = \text{Max}\{\dim(U^+), \dim(X \setminus U)\}$. Ensuite, on démontre en 1.12 que, si J est essentiel dans A et isomorphe à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, alors on a $rr(A) = rr(A/J)$. En particulier, on a $rr(\mathcal{T}) = 1$, où $\mathcal{T}$ est l'algèbre de Toeplitz.

Soient A, J deux C^* -algèbres, on note A^+ la C^* -algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A , $\tilde{A} = A^+$ si A n'est pas unitaire et $\tilde{A} = A$ si A est unitaire, et A_{sa} (resp. A_+) l'ensemble des éléments hermitiens (resp. positifs ou nuls) dans A . $J < A$, signifie que J est un idéal bilatère fermé dans la C^* -algèbre A . On dit que J est un idéal essentiel dans A si $J < A$ et si tout idéal bilatère fermé non nul dans A a une intersection non nulle avec J ([6], 3.12.7). $\mathcal{M}(A)$ la C^* -algèbre des multiplicateurs de A et A'' l'algèbre de von Neumann enveloppante de A , alors on a $\mathcal{M}(A) \subset A''$ [6]. Si A est unitaire, on note $GL(A)$ l'ensemble des éléments inversibles dans A , $GL(A)_+ = GL(A) \cap A_+$

Received by the editors November 1, 1993 and, in revised form, March 17, 1994.
 1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46L05.

et $Lg_n(A)$ l'ensemble des n -uples d'éléments de A qui engendrent A en tant qu'idéal à gauche et on pose $gh_n(A) = Lg_n(A) \cap (A_{sa})^n$.

$$\text{c.à.d.}, gh_n(A) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (A_{sa})^n / \sum_{i=1}^n x_i^2 \in GL(A)_+ \right\}.$$

On note $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) la C^* -algèbre des opérateurs compacts (resp. continus) sur l'espace hilbertien $\mathcal{H}$, et si $\mathcal{H}$ est séparable de dimension infinie, on pose $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$.

Définition [1]. Soit A une C^* -algèbre unitaire. Le rang réel de A , noté $rr(A)$, est le plus petit entier $n \geq 0$ (s'il existe) tel que $gh_{n+1}(A)$ soit dense dans $(A_{sa})^{n+1}$. S'il n'existe aucun $n \geq 0$ tel que $gh_{n+1}(A)$ soit dense dans $(A_{sa})^{n+1}$, on pose $rr(A) = +\infty$. Si A est non unitaire, on pose $rr(A) = rr(\tilde{A})$.

Remarque. Pour toute C^* -algèbre A , on a $rr(A) = rr(A^+)$.

Définition [5]. Soit X un espace topologique non vide, la dimension de recouvrement de X , notée $\dim(X)$, est le plus petit entier $n \geq 0$ (s'il existe) tel que l'on ait la propriété suivante:

(P_n): pour tout recouvrement ouvert $U_1, \dots, U_k$ de X , il existe un recouvrement ouvert $V_1, \dots, V_k$ de X tel que $V_i \subset U_i$ pour tout i et pour tout $x \in X$, il existe au plus $(n+1)$ éléments de $\{V_1, \dots, V_k\}$ contenant x . S'il n'existe aucun $n \geq 0$ tel que l'on ait (P_n), on pose $\dim(X) = +\infty$. Si $X = \emptyset$, la dimension de X est par définition égal à -1 .

1. RANG RÉEL DE CERTAINES EXTENSIONS

1.1. Lemme [4]. Soient A une C^* -algèbre et $n \geq 0$. Etant donnés $\varepsilon > 0$ et $a = (1 + a_0, a_1, \dots, a_n) \in gh_{n+1}(\tilde{A})$ avec $a_i \in A_{sa}$, alors il existe $b = (1 + b_0, b_1, \dots, b_n) \in gh_{n+1}(\tilde{A})$ avec $b_i \in A_{sa}$ tel que $\|b_i - a_i\| < \varepsilon$ pour $i = 0, \dots, n$.

1.2. Lemme [4]. Soient A une C^* -algèbre, $n \geq 0$ et $1 = 1_{A^+}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $rr(A) \leq n$;
- (ii) $(1 + A_{sa}) \times (A_{sa})^n \subset \overline{gh_{n+1}(A^+)}$;
- (iii) $\forall \varepsilon > 0, \forall \xi \in (1 + A_{sa}) \times (A_{sa})^n$, il existe $\eta = (1 + a_0, a_1, \dots, a_n) \in gh_{n+1}(A^+)$ avec $a_i \in A_{sa}$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$) tel que $\|\xi - \eta\| < \varepsilon$.

1.3. Proposition. Soient A une C^* -algèbre, $J < A$ et $n \geq 0$, alors on a:

$$rr(J) \leq n \text{ si et seulement si } (1 + J_{sa}) \times (J_{sa})^n \subset \overline{gh_{n+1}(\tilde{A})}.$$

Démonstration. La démonstration est inspirée de ([7], 4.4). La condition est clairement nécessaire, montrons sa suffisance. On peut supposer $1 \in A$ (car $J < A^+$) et donc $\tilde{A} = A$. On peut aussi supposer $J \neq A$, car sinon, c'est clair.

Soient $d = (1 + d_0, d_1, \dots, d_n) \in (1 + J_{sa}) \times (J_{sa})^n$ et $\varepsilon > 0$. D'après 1.2, il suffit de démontrer qu'il existe $a \in [gh_{n+1}(J^+)] \cap [(1 + J_{sa}) \times (J_{sa})^n]$ tel que $\|d - a\| < \varepsilon$. Par hypothèse, il existe $(1 + a_0, a_1, \dots, a_n) \in gh_{n+1}(A)$ tel que $\|d_i - a_i\| < \varepsilon/2$, pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Soit $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, une unité approchée pour J ([6], 1.4), alors il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on ait $\|u_\lambda d_i - d_i\| < \varepsilon/2$ et $\|u_\lambda d_i u_\lambda - d_i\| <$

$\varepsilon/2$ ($i = 0, \dots, n$). Puisque $(1 + a_0, a_1, \dots, a_n) \in gh_{n+1}(A)$, alors il existe $b_0, b_1, \dots, b_n$ dans A tels que

$$(1 + b_0)(1 + a_0) + b_1 a_1 + \dots + b_n a_n = 1, \text{ d'où on a } b_0 + a_0 + \sum_{i=0}^n b_i a_i = 0.$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $u_{\lambda_0} b_i \in J$, donc il existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_1$, on ait $\|u_{\lambda_0} b_i - u_{\lambda_0} b_i u_\lambda\| < \varepsilon/2$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Désormais, on travaille avec $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_1$. On a donc $\|u_\lambda a_i u_\lambda - u_\lambda d_i u_\lambda\| \leq \|a_i - d_i\| < \varepsilon/2$, d'où on a $\|d_i - u_\lambda a_i u_\lambda\| < \varepsilon$ pour tous $i \in \{0, \dots, n\}$ et $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_1$. Montrons qu'alors

$$a_\lambda = (1 + u_\lambda a_0 u_\lambda, u_\lambda a_1 u_\lambda, \dots, u_\lambda a_n u_\lambda)$$

est dans $gh_{n+1}(J^+)$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_1$.

On a $u_{\lambda_0} b_0 u_\lambda + u_{\lambda_0} a_0 u_\lambda + \sum_{i=0}^n u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda = 0$. D'où on a:

$$\begin{aligned} & \left\| 1 - \left[(u_{\lambda_0} b_0 + 1)(1 + u_\lambda a_0 u_\lambda) + \sum_{i=1}^n u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda \right] \right\| \\ &= \left\| u_{\lambda_0} b_0 + u_\lambda a_0 u_\lambda + \sum_{i=0}^n u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda \right\| \\ &= \left\| u_{\lambda_0} b_0 + u_\lambda a_0 u_\lambda + \sum_{i=0}^n u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda - \sum_{i=0}^n u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda + \sum_{i=0}^n u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda \right\| \\ &= \left\| u_{\lambda_0} b_0 + u_\lambda a_0 u_\lambda - u_{\lambda_0} b_0 u_\lambda - u_{\lambda_0} a_0 u_\lambda + \sum_{i=0}^n (u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda - u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda) \right\| \\ &\leq \|u_{\lambda_0} b_0 - u_{\lambda_0} b_0 u_\lambda + u_\lambda a_0 u_\lambda - u_{\lambda_0} a_0 u_\lambda\| \\ &\quad + \left\| \sum_{i=0}^n (u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda - u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda) \right\|. \end{aligned}$$

Posons:

$$x = \|u_{\lambda_0} b_0 - u_{\lambda_0} b_0 u_\lambda + u_\lambda a_0 u_\lambda - u_{\lambda_0} a_0 u_\lambda\|$$

et

$$y = \left\| \sum_{i=0}^n (u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda - u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda) \right\|,$$

alors on a:

$$\begin{aligned} x &\leq \|u_{\lambda_0} b_0 - u_{\lambda_0} b_0 u_\lambda\| + \|u_\lambda a_0 u_\lambda - u_{\lambda_0} a_0 u_\lambda\| \\ &\leq \|u_{\lambda_0} b_0 - u_{\lambda_0} b_0 u_\lambda\| + \|u_\lambda a_0 - d_0\| + \|d_0 - u_{\lambda_0} a_0\|. \end{aligned}$$

On a $\|u_\lambda a_0 - u_\lambda d_0\| \leq \|a_0 - d_0\| < \varepsilon/2 \quad \forall \lambda \in \Lambda$ et $\|u_\lambda d_0 - d_0\| < \varepsilon/2 \quad \forall \lambda \geq \lambda_0$. D'où pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on a $\|u_\lambda a_0 - d_0\| < \varepsilon$. D'où on a $x \leq 3\varepsilon/2$.

On a:

$$\begin{aligned} y &\leq \sum_{i=0}^n \|u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i u_\lambda - u_{\lambda_0} b_i a_i u_\lambda\| \leq \sum_{i=0}^n \|u_{\lambda_0} b_i u_\lambda a_i - u_{\lambda_0} b_i a_i\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \|u_{\lambda_0} b_i u_\lambda - u_{\lambda_0} b_i\| \|a_i\|. \end{aligned}$$

Soit $\delta = \text{Max}\{\|d_i\|; i = 0, \dots, n\}$, alors on a $y \leq (n+1)(\varepsilon/2)[\delta + (\varepsilon/2)]$. D'où pour tout $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_1$, on a:

$$\left\| 1 - \left[(u_{\lambda_0} b_0 + 1)(1 + u_{\lambda} a_0 u_{\lambda}) + \sum_{i=1}^n u_{\lambda_0} b_i u_{\lambda} a_i u_{\lambda} \right] \right\| < (\varepsilon/2)[(n+1)(\delta + (\varepsilon/2)) + 3].$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $(\varepsilon/2)[(n+1)(\delta + (\varepsilon/2)) + 3] < 1$, on a:

$$a_{\lambda} \in [gh_{n+1}(J^+)] \cap [(1 + J_{sa}) \times (J_{sa})^n] \text{ et } \|d - a_{\lambda}\| < \varepsilon. \quad \square$$

1.4. Théorème. Soient A une C^* -algèbre et $J < A$, alors on a:

$$\text{Max}\{\text{rr}(J), \text{rr}(A/J)\} \leq \text{rr}(A).$$

Démonstration. $\text{rr}(J) \leq \text{rr}(A)$ résulte immédiatement de la proposition précédente. Supposons d'abord que A est unitaire, alors pour tout $n \geq 1$ on a: $((A)_{sa})^n \xrightarrow{\pi} ((A/J)_{sa})^n$ est surjectif, continu et $\pi(gh_n(A)) \subset gh_n(A/J)$. Donc, si $m = \text{rr}(A)$, on a $gh_{m+1}(A) = ((A)_{sa})^{m+1}$ d'où $gh_{m+1}(A/J) = ((A/J)_{sa})^{m+1}$, d'où $\text{rr}(A/J) \leq \text{rr}(A)$. Si $1 \notin A$, alors on a $(\tilde{A}/J) \cong (a/J)^+$, d'où on a: $\text{rr}(A/J) = \text{rr}((a/J)^+) = \text{rr}(\tilde{A}/J) \leq \text{rr}(\tilde{A}) = \text{rr}(A)$. $\square$

Rappelons le résultat suivant dû à [5].

1.5. Proposition. Soient X un espace normal et Y un fermé dans X , si $\dim(Y) \leq n$ et si $\dim(F) \leq n$, pour tout fermé F dans X tel que $F \cap Y = \emptyset$, alors on a $\dim(X) \leq n$.

1.6. Corollaire. Soient X un espace compact et U un ouvert dans X , alors on a:

$$\dim(X) = \text{Max}\{\dim(U^+), \dim(X \setminus U)\}.$$

Démonstration. On a $\text{Max}\{\dim(U^+), \dim(X \setminus U)\} \leq \dim(X)$, ceci découle de 1.4, où on prend $A = C(X)$, $J = C_0(U)$ et $A/J = C(X \setminus U)$, et du fait que $J^\sim = C(U^+)$. Donc il reste à démontrer l'inégalité opposée. On peut supposer $\text{Max}\{\dim(U^+), \dim(X \setminus U)\} = n$ (fini). On pose $Y = X \setminus U$, donc Y est fermé dans X et on a $\dim(Y) \leq n$. Soit F un fermé dans X tel que $F \cap Y = \emptyset$, alors on a $F \subset U \subset U^+$, F est un espace compact et U^+ est un espace séparé, d'où F est fermé dans U^+ , et alors $\dim(F) \leq \dim(U^+) \leq n$, par 1.4. D'où on a $\dim(X) \leq n$ par 1.5. $\square$

Il faut noter qu'il existe un espace compact X et un ouvert U dans X tel que $\dim(U) = 1 > 0 = \dim(X)$ ([5], 4.3.1, p. 161).

1.7. Théorème. Soient A une C^* -algèbre commutative et $J < A$, alors on a:

$$\text{rr}(A) = \text{Max}\{\text{rr}(J), \text{rr}(A/J)\}.$$

Démonstration. Si $1 \in A$, ceci découle immédiatement du corollaire précédent. Si $1 \notin A$, alors on a la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow J \rightarrow A^+ \rightarrow (A/J)^+ \rightarrow 0.$$

D'où, on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(A^+) = \text{Max}\{\text{rr}(J), \text{rr}((A/J)^+)\} = \text{Max}\{\text{rr}(J), \text{rr}(A/J)\}$. $\square$

1.8. Remarques ([6], 3.12). (i) Soient A une C^* -algèbre et $x \in \mathcal{M}(A)$ tel que $Ax = \{0\}$, alors on a $x = 0$. Puisque $Ax = \{0\}$, on a $\forall a \in A \quad ax = 0$.

D'où, par continuité, $\forall b \in A''$, on a $bx = 0$. Comme $x \in \mathcal{M}(A) \subset A''$, d'où $x^*x = 0$, donc $x = 0$.

(ii) Soient A une C^* -algèbre et $J < A$, alors on a:

$$J \subset A \subset \mathcal{M}(J) \Leftrightarrow J \text{ est un idéal essentiel dans } A.$$

Démonstration. Si J est un idéal essentiel dans A , alors on a $A \subset \mathcal{M}(J)$ par ([6], 3.12.8). Démontrons l'autre sens. Soit $I < A$ tel que $J \cap I = \{0\}$. Soit $x \in I$, alors on a $Jx \subset (J \cap I) = \{0\}$, d'où $x = 0$ car $x \in A \subset \mathcal{M}(J)$. Donc on a $I = \{0\}$, donc J est un idéal essentiel dans A .

(iii) On a $\mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ([6], 3.12.3).

(iv) Soient A une C^* -algèbre et $J < A$ tel que $J \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$, alors par (ii) et (iii) on a:

$$J \text{ est essentiel dans } A \Leftrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Soient A une C^* -algèbre et J un idéal bilatère fermé dans A , de sorte que l'on a la suite exacte courte suivante:

$$(1) \quad 0 \rightarrow J \rightarrow A \xrightarrow{\pi} A/J \rightarrow 0.$$

On dit que (1) est triviale (resp. scindée) si $A \cong J \oplus (A/J)$ (resp. s'il existe $\phi \in \text{Hom}(A/J, A)$ tel que $\pi_0\phi = \text{id}_{A/J}$).

1.9. Proposition. *On suppose que, dans (1), A/J est simple et J est idéal non trivial dans A , alors on a:*

(i) J n'est pas essentiel dans A si et seulement si (1) est triviale.

(ii) Si A est unitaire et J est non unitaire, alors J est essentiel dans A .

Si de plus J est simple, alors J est l'unique idéal bilatère fermé non trivial dans A .

Démonstration. (i) Si (1) est triviale, alors il est clair que J n'est pas essentiel dans A . Réciproquement, si J n'est pas essentiel dans A , alors il existe I , idéal bilatère fermé et non nul dans A tel que $I \cap J = \{0\}$. On a $\pi(I) < A/J$ et $\pi(I) \neq \{0\}$, car $I \neq \{0\}$ et $I \cap J = \{0\}$. Puisque A/J est simple, on a $\pi(I) = A/J$. Puisque $\pi|_I$ est injectif ($I \cap J = \{0\}$), $\pi|_I$ est un isomorphisme de C^* -algèbres de I sur A/J , d'où $I \cong A/J$ et $A = I + J$. Comme $IJ = I \cap J = \{0\}$ et $I, J < A$, on a $A \cong I \oplus J$. D'où $A \cong J \oplus (A/J)$ et π s'identifie avec la projection canonique sur la deuxième composante.

(ii) On suppose maintenant A unitaire et J non unitaire. Si J n'est pas essentiel, alors d'après (i), on peut supposer que $A = J \oplus (A/J)$.

Puisque A est unitaire ceci entraîne que J est unitaire, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc J est essentiel dans A . On suppose de plus que J est simple, et soit I un idéal bilatère fermé non nul dans A tel que $I \neq J$. On a $(I \cap J) < J$, et puisque J est essentiel dans A , on a $I \cap J \neq \{0\}$. Puisque J est simple, on a $I \cap J = J$ et alors $J \subset I$. On a $\pi(I) < A/J$ et $\pi(I) \neq \{0\}$ car $I \neq \{0\}$ et $J \neq I$. D'où $\pi(I) = A/J$, car A/J est simple, et alors $A = I + J = I$ (car $J \subset I$). $\square$

1.10. Remarque. Soit A une C^* -algèbre, alors on a:

$$A \text{ est essentiel dans } A^+ \Leftrightarrow A \text{ est non unitaire.}$$

Ceci résulte immédiatement du (ii) de la proposition précédente. Remarquons que si A est non unitaire la suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ est scindée non

triviale, $\mathbb{C}$ est simple et A est essentiel dans $\tilde{A}$ où $\mathbb{C}$ est le corps de nombres complexes.

1.11. Corollaire. Soient A une C^* -algèbre unitaire et $J < A$, non unitaire et non nul. Si A/J est simple, alors on a $J \subset A \subset \mathcal{M}(J)$.

Ceci résulte immédiatement de la proposition précédente et de 1.8 (ii).

1.12. Théorème. On suppose que, dans (1), J est un idéal essentiel dans A et isomorphe à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Alors on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(A/J)$.

Démonstration. Grâce à la Remarque 1.8 (iv), on peut supposer $J = \mathcal{K}(\mathcal{H}) < A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si $\dim(\mathcal{H}) = n < +\infty$, on a $A = M_n(\mathbb{C})$ et $A/J = \{0\}$. D'où on a $\text{rr}(A/J) = \text{rr}(0) = \text{rr}(0^+) = \text{rr}(\mathbb{C}) = 0 = \text{rr}(M_n(\mathbb{C})) = \text{rr}(A)$ ([1], 2.10). Donc on peut supposer que $\dim(\mathcal{H}) = +\infty$. Supposons d'abord que A est unitaire (nécessairement $1_A = 1_{\mathcal{H}}$ car $\mathcal{K}(\mathcal{H}) < A$). On sait, par le Théorème 1.4, que l'on a $\text{rr}(A/J) \leq \text{rr}(A)$, donc il reste à démontrer l'autre inégalité. On peut supposer $\text{rr}(A/J) = n < +\infty$, parce que sinon on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(A/J) = +\infty$.

Soient $(h_1, h_2, \dots, h_{n+1}) \in (A_{sa})^{n+1}$ et $\varepsilon > 0$. Posons pour $i = 1, 2, \dots, n+1$, $B_i = \{x \in A_{sa} \mid \|h_i - x\| < \varepsilon\}$ et $U = \prod_{i=1}^{n+1} B_i$. Puisque $\pi: (A_{sa})^{n+1} \rightarrow ((A/J)_{sa})^{n+1}$ est linéaire, continue et surjective, donc $\pi(U)$ est un ouvert non vide dans $((A/J)_{sa})^{n+1}$. Puisque l'on a $n = \text{rr}(A/J)$, il existe

$$(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \in (U) \cap gh_{n+1}(A/J).$$

Donc il existe $x_i \in B_i$ tel que $f_i = \pi(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, n+1$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \in A_+$. Puisque $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \in gh_{n+1}(A/J)$ et $\pi(x_i) = f_i$, on a $\pi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \in \text{GL}(A/J)_+$, donc x est opérateur de Fredholm positif. Soit $p = 1 - q$ où q est le support de x , donc on a $p \in J$ et $[x + ((n+1)\varepsilon^2)p] \in \text{GL}(A)_+$. Pour $i = 1, \dots, n+1$, on a $x \geq (x_i)^2 \geq 0$, ceci implique $(x_i)p = 0$. Comme $p, x_i \in A_{sa}$, ceci entraîne que $px_i = 0$.

Pour $i = 1, \dots, n+1$, posons $z_i = x_i + \varepsilon p \in A_{sa}$, alors on a $\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = x + ((n+1)\varepsilon^2)p \in \text{GL}(A)_+$. Donc on a $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in gh_{n+1}(A)$ et $\|z_i - h_i\| \leq \|z_i - x_i\| + \|x_i - h_i\| < 2\varepsilon$. D'où on a $\overline{gh_{n+1}(A)} = (A_{sa})^{n+1}$. Donc on a $\text{rr}(A) \leq n = \text{rr}(A/J)$, d'où $\text{rr}(A) = \text{rr}(A/J)$. Si $1 \notin A$, on a $(\tilde{A})/J \cong (A/J)^+$, et alors on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(\tilde{A}) = \text{rr}((\tilde{A})/J) = \text{rr}((A/J)^+) = \text{rr}(A/J)$. $\square$

1.13. Corollaire. On a les propriétés suivantes:

- (i) si A est l'algèbre de Toeplitz $\mathcal{T}$, on a $\text{rr}(A) = 1$,
- (ii) si A est l'une des algèbres O_n de Cuntz [3] ($n \geq 2$), on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(O_n) = 0 = \text{rr}(O_\infty)$.

Démonstration. (i) On a la suite exacte bien connue.

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow C(T) \rightarrow 0.$$

Avec $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$, d'où on a $\text{rr}(\mathcal{T}) = \text{rr}(C(T)) = \dim(T) = 1$.

(ii) On a la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow A \rightarrow O_n \rightarrow 0 \text{ ([2], 3.1)}.$$

O_n est une C^* -algèbre simple, unitaire et purement infinie ([2], 1.13). D'où on a $\text{rr}(O_n) = 0$ ([1], 3.9). De même on a $\text{rr}(O_\infty) = 0$. Puisque O_n est simple et

$\mathcal{K}$ non unitaire, alors d'après 1.9(ii), $\mathcal{K}$ est un idéal essentiel dans A , d'où par 1.12, on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(A/\mathcal{K}) = \text{rr}(O_n) = 0$. $\square$

1.14. Corollaire. Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien séparable de dimension infinie et $n \in \mathcal{N} \cup \{\infty\}$, alors il existe une sous- C^* -algèbre unitaire A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que $\mathcal{K} < A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\text{rr}(A) = n$ et $A/(\mathcal{K})$ est commutative.

Démonstration. Soit X un espace compact et métrique de dimension n (par exemple $X = [0, 1]^n$), alors X est séparable et il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathcal{N}}$ dense dans X telle que chaque x_n est répété une infinité de fois. Soient $\mathcal{H} = l^2(\mathcal{N})$, $\pi: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$, la surjection canonique et $\Lambda: C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$, définie par: $\Lambda(f) = \pi(\text{diag}(f(x_n)))$. Alors Λ est un morphisme de C^* -algèbres. Soit $f \in C(X)$ tel que $\Lambda(f) = 0$, alors $\text{diag}(f(x_n))$ est un opérateur compact et comme chaque x_n est répété une infinité de fois, on a $f = 0$, d'où Λ est injective. Posons $A = \pi^{-1}(\Lambda(C(X)))$, alors A est une C^* -algèbre unitaire dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ contenant $\mathcal{K}$ et on a la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow A \rightarrow C(X) \rightarrow 0.$$

D'où, d'après le Théorème 1.12, on a $\text{rr}(A) = \text{rr}(C(X)) = \dim(X) = n$. $\square$

Face à tous ces résultats, on ne sait pas répondre à la question suivante: Existe-t-il une C^* -algèbre A et J un idéal bilatère fermé dans A tel que l'on ait

$$\text{rr}(A) > \text{Max}\{\text{rr}(J), \text{rr}(A/J)\}?$$

ACKNOWLEDGMENT

Ce travail fait partie de ma thèse [4], préparée sous la direction du Professeur Georges Zeller-Meier que je remercie vivement.

REFERENCES

1. L. G. Brown et G. K. Pedersen, *C^* -algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 131–149.
2. J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173–185.
3. ———, *K -theory for certain C^* -algebras*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), 181–197.
4. N. Elhage Hassan, *Rangs stables des C^* -algèbres*, Thèse, Université d'Aix-Marseille-II, 1993.
5. A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.
6. G. K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.
7. M. A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K -theory of C^* -algebras*, Proc. London. Math. Soc. (3) **46** (1983), 301–333.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ D'ORLÉANS, B.P. 6759, 45067 ORLÉANS CEDEX 2, FRANCE

E-mail address: Nawfal@Labomath.univ-orleans.fr