THÉORÈME DE L'APPLICATION SPECTRALE POUR LE SPECTRE ESSENTIEL QUASI-FREDHOLM

M. BERKANI AND A. OUAHAB

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

ABSTRACT. In 1958, T. Kato proved that a closed semi-Fredholm operator A in a Banach space can be written $A = A_1 \oplus A_0$ where A_0 is a nilpotent operator and A_1 is a regular one.

J. P. Labrousse studied and characterised this class of operators in the case of Hilbert spaces. He also defined a new spectrum named “essential quasi-Fredholm spectrum” and denoted $\sigma_e(A)$.

In this paper we prove that the essential quasi-Fredholm spectrum defined by J. P. Labrousse satisfies the mapping spectral theorem, i.e.: If A is a bounded operator in a Hilbert space and f an analytic function in a neighbourhood of the spectrum $\sigma(A)$ of A , then $f(\sigma_e(A)) = \sigma_e(f(A))$.

RÉSUMÉ. En 1958, T. Kato a montré que si A est un opérateur fermé dans un espace de Banach et semi-Fredholm, alors il existe A_1, A_0 tels que $A = A_1 \oplus A_0$ où A_0 est nilpotent et A_1 est régulier.

J. P. Labrousse a étudié et caractérisé cette classe d'opérateurs dans le cadre des espaces de Hilbert et a défini un nouveau spectre qu'on appelle “spectre essentiel quasi-Fredholm” et noté par $\sigma_e(A)$.

Dans ce travail nous allons démontrer que le spectre essentiel quasi-Fredholm défini par J. P. Labrousse vérifie le théorème de l'application spectrale, c'est à dire: Si A est un opérateur borné d'un espace de Hilbert dans lui même et f une fonction analytique au voisinage du spectre $\sigma(A)$ de A , alors $f(\sigma_e(A)) = \sigma_e(f(A))$.

1. INTRODUCTION

Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ et d'image $R(A)$ dans un espace de Hilbert H . Notons par $N(A)$ le noyau de A .

On a le résultat algébrique suivant:

Lemme 1.1. *Soit A un opérateur dans un espace vectoriel, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\forall m \geq 0, N(A) \subseteq R(A^m),$
- (ii) $\forall n \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A),$
- (iii) $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A^m),$
- (iv) $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, N(A^n) = A^m(N(A^{n+m})).$

Received by the editors March 13, 1995.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A10, 47A53.

Key words and phrases. Opérateur régulier, semi-Fredholm, quasi-Fredholm, spectre essentiel.

Définition 1.2 (cf. [4] et [5]). Soit A un opérateur fermé d'un espace de Hilbert H dans lui-même tel que $R(A)$ soit fermé. Alors A est dit régulier si A vérifie l'une des conditions équivalentes du lemme 1.1.

Définition 1.3. Soit

$$\Delta(A) = \{n \in \mathbf{N} : \forall m \in \mathbf{N} \ m \geq n \Rightarrow (R(A^n) \cap N(A)) \subseteq (R(A^m) \cap N(A))\}$$

alors on appellera degré d'itération stable de A la quantité $\text{dis}(A) = \inf \Delta(A)$. (Avec $\text{dis}(A) = \infty$ si $\Delta(A) = \emptyset$.)

Exemple. Si A est régulier alors $\text{dis}(A) = 0$.

Définition 1.4. Soit A un opérateur fermé d'un espace de Hilbert H dans lui-même. On dira que A est quasi-Fredholm de degré $d \in \mathbf{N}$, ce qui sera noté $A \in q\phi(d)$, si:

- (a) $\text{dis}(A) = d$,
- (b) $R(A^d) \cap N(A)$ est fermé dans H ,
- (c) $R(A) + N(A^d)$ est fermé dans H .

On dira que A est quasi-Fredholm ($A \in q\phi$) s'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $A \in q\phi(d)$.

Définition 1.5. Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H . On dira que A est décomposable au sens de Kato de degré d s'il existe M et N deux sous-espaces fermés de H tels que:

- (a) $H = M \oplus N$,
- (b) $A(M \cap D(A)) \subset M$ et $(A|_M)$ est régulier,
- (c) $N \subset D(A)$, $A(N) \subset N$ et $A|_N$ est nilpotent de degré d .

On appellera alors le couple (M, N) une décomposition de Kato associée à A .

Théorème 1.6 (voir [3, Théorème 3.2.2]). *Les définitions 1.4 et 1.5 sont équivalentes.*

Notations. On notera:

Par $\rho_{q\phi}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (A - \lambda I) \in q\phi\}$, alors d'après [3, Proposition 4.3.1] $\rho_{q\phi}(A)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ et si on note par $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible}\}$, on a $\rho(A) \subset \rho_{q\phi}(A)$.

Par $\sigma_e(A)$ le spectre essentiel quasi-Fredholm de A , c'est à dire le complémentaire de $\rho_{q\phi}(A)$ dans $\mathbf{C}$. $\sigma_e(A)$ est alors fermé dans $\mathbf{C}$ et si on note par $\sigma(A)$ le spectre usuel de A , alors $\sigma_e(A) \subset \sigma(A)$.

2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$, on suppose que $\rho(A) \neq \emptyset$ de sorte que, si P est un polynôme en une variable, à coefficients complexes, de degré p , alors $P(A)$ est un opérateur fermé (voir [1, page 602]). Si on note par $N(P(A))$ le noyau de $P(A)$, on sait qu'alors $N(P(A))$ est fermé dans H .

Nous poserons par la suite $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ où les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les racines deux à deux distinctes de P , ayant chacune la multiplicité m_i . On a alors $P(A) = \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)^{m_i}$ où I est l'application identique de H vers H .

Nous allons commencer par établir quelques résultats préliminaires.

Lemme 2.1. *Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H et soit $m \in \mathbf{N}^*$. Alors on a: $\text{dis}(A) \leq m \text{dis}(A^m)$.*

Preuve. Si $\text{dis}(A^m) = \infty$, l'inégalité est triviale. Supposons donc que $\text{dis}(A^m) \in \mathbf{N}$, posons $d = \text{dis}(A^m)$ et montrons que $md \in \Delta(A)$.

On a $\forall n$,

$$n \geq d \Rightarrow R(A^{md}) \cap N(A^m) \subset R(A^{mn}) \cap N(A^m).$$

Alors $\forall n$,

$$n \geq d \Rightarrow R(A^{md}) \cap N(A^m) \cap N(A) \subset R(A^{mn}) \cap N(A^m) \cap N(A).$$

Donc $\forall n$,

$$n \geq d \Rightarrow R(A^{md}) \cap N(A) \subset R(A^{mn}) \cap N(A).$$

Soit $p \geq md$. On a $p = mk + r$, $0 \leq r \leq m - 1$,

$$\Rightarrow R(A^p) \cap N(A) = R(A^{mk+r}) \cap N(A) \supset R(A^{m(k+1)}) \cap N(A).$$

Or $m(k+1) \geq md$

$$\Rightarrow R(A^{m(k+1)}) \cap N(A) \supset R(A^{md}) \cap N(A)$$

et par suite on a: $R(A^p) \cap N(A) = R(A^{md}) \cap N(A)$ si $p \geq md$. Ceci implique que $md \in \Delta(A)$ et par suite $\text{dis}(A) \leq m \text{dis}(A^m)$.

Lemme 2.2. Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H et soit $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, avec $n \geq 2$. Posons $d = \text{dis}(P(A))$ et $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $d_i = \text{dis}((A - \lambda_i I)^{m_i})$. Alors $d = \max_{i=1}^n d_i$.

Preuve. Soit $d = \text{dis}(P(A))$. Montrons que si $d \in \mathbf{N}$, alors $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, on a $d \in \Delta((A - \lambda_i I)^{m_i})$: Si $d = 0$, alors $\forall m \in \mathbf{N}$ $N(P(A)) \subset R(P(A)^m)$, et d'après le lemme 1.1 on a $\forall m \in \mathbf{N}$ $N(P(A)^m) \subset R(P(A))$ et par suite $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, et $\forall m \in \mathbf{N}$ on a $N((A - \lambda_i I)^{m m_i}) \subset N(P(A)^m) \subset R(P(A)) \subset R((A - \lambda_i I)^{m_i})$. D'après le lemme 1.1 on a $\forall m \in \mathbf{N}$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $N((A - \lambda_i I)^{m_i}) \subset R((A - \lambda_i I)^{m_i m})$. D'où $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $\text{dis}((A - \lambda_i I)^{m_i}) = 0$.

Supposons que $d \geq 1$, et soit $y \in R((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \cap N((A - \lambda_i I)^{m_i})$, alors il existe $x \in D(A^{m_i d})$ tel que $y = (A - \lambda_i I)^{m_i d}(x)$. En particulier $\forall m \in \mathbf{N}$, $y \in D(A^m)$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) = P(A)^d(x) \\ &\Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) \in R(P(A)^d) \cap N(P(A)). \end{aligned}$$

Et comme $\text{dis}(P(A)) = d$ alors: $\forall m \geq d$

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) \in R(P(A)^m) \cap N(P(A)) \\
& \Rightarrow \exists z \in D(P(A)^m) : \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) = P(A)^m(z) \\
& \Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_i I + (\lambda_i - \lambda_j)I)^{m_j d}(y) = P(A)^m(z) \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k y = P(A)^m(z) \text{ où les } \{c_k\}_{0 \leq k \leq (p-m_i)d} \\
& \hspace{15em} \text{sont des constantes et } c_0 \neq 0 \\
& \Rightarrow c_0 y = P(A)^m(z) - \sum_{k=1}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k y \\
& \Rightarrow c_0 y = \prod_{j=1}^n (A - \lambda_j I)^{m_j m}(z) - \sum_{k=1}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k y.
\end{aligned}$$

On voit alors que $\forall m, m \geq d, y \in R((A - \lambda_i I)^{m_i m}) \cap N((A - \lambda_i I)^{m_i}) \Rightarrow \forall i, 1 \leq i \leq n, d_i \leq d$, où $d_i = \text{dis}((A - \lambda_i I)^{m_i})$. Donc si $d \in \mathbf{N}$, on a $\text{Max}_{i=1}^n d_i \leq d$. Posons $d_0 = \text{Max}_{i=1}^n d_i$ et montrons que $d_0 \in \Delta(P(A))$. Soit $y \in R(P(A)^{d_0}) \cap N(P(A))$ (en particulier $\forall m \in \mathbf{N}, y \in D(A^m)$). Donc

$$\begin{aligned}
& \exists x \in D(P(A)^m) : y = \prod_{j=1}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d_0}(x) \\
& \Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(y) = (A - \lambda_i I)^{m_i d_0} \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j(d_0+1)}(x) \\
& \Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(y) \in R((A - \lambda_i I)^{m_i d_0}) \cap N((A - \lambda_i I)^{m_i}) \\
& \Rightarrow \forall m, m \geq d_0, \text{ on a } \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(y) \in R((A - \lambda_i I)^{m_i m}) \cap N((A - \lambda_i I)^{m_i}) \\
& \Rightarrow \exists t \in D(A^{m_i m}) : \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(y) = (A - \lambda_i I)^{m_i m}(t) \\
& \Rightarrow \exists t \in D(A^{m_i m}) : \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_i I + (\lambda_i - \lambda_j)I)^{m_j}(y) = (A - \lambda_i I)^{m_i m}(t) \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^{p-m_i} c_k (A - \lambda_i I)^k y = (A - \lambda_i I)^{m_i m}(t), \text{ où les } \{c_k\}_{0 \leq k \leq p-m_i}
\end{aligned}$$

sont des constantes et $c_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_0 y &= (A - \lambda_i I)^{m_i m}(t) - \sum_{k=1}^{(p-m_i)} c_k (A - \lambda_i I)^k y \\ \Rightarrow y &\in R((A - \lambda_i I)^{m_i m}) \Rightarrow \exists t_1 \in D(A^{m_i m}): y = (A - \lambda_i I)^{m_i m}(t_1). \end{aligned}$$

Et de la même manière on montre que $\forall j, j \neq i, y \in R((A - \lambda_j I)^{m_j m})$. Donc

$$\begin{aligned} \exists t_2 \in D(A^{m_j m}): y &= (A - \lambda_j I)^{m_j m}(t_2) \\ \Rightarrow (A - \lambda_j I)^{m_j m}(t_2) &= (A - \lambda_i I)^{m_i m}(t_1) \\ \Rightarrow (A - \lambda_j I + (\lambda_j - \lambda_i)I)^{m_i m}(t_1) &= (A - \lambda_j I)^{m_j m}(t_2). \end{aligned}$$

En développant le membre de gauche de cette égalité on en déduit que $t_1 \in R((A - \lambda_j I)^{m_j m}) \Rightarrow \exists s_1 \in D(A^{m_j m}): y = (A - \lambda_i I)^{m_i m}(A - \lambda_j I)^{m_j m}(s_1)$. Et par récurrence on voit que $\forall m, m \geq d_0, y \in R(P(A)^m) \Rightarrow y \in R(P(A)^m) \cap N(P(A))$ et par suite $d_0 \in \Delta(P(A)) \Rightarrow d \leq d_0$. Et par conséquent on a: $d = \text{Max}_{i=1}^n d_i$.

Si $d = \infty$ alors forcément $\text{Max}_{i=1}^n d_i = \infty$ car sinon on aurait $d_0 = \text{Max}_{i=1}^n d_i \in \mathbb{N}$ et d'après ce qui précède on aurait $d_0 \in \Delta(P(A))$; ce qui est absurde. Donc $\text{Max}_{i=1}^n d_i = \infty$.

Lemme 2.3. Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H . Alors A est quasi-Fredholm si et seulement si il existe un entier $d \in \Delta(A)$ tel que:

- (i) $R(A^d) \cap N(A)$ est fermé,
- (ii) $R(A) + N(A^d)$ est fermé.

Preuve. Si: Il suffit de prendre $d = \text{dis}(A)$.

Seulement si: Soit $d_0 = \text{dis}(A)$ et $d \in \Delta(A)$ On a: $R(A^{d_0}) \cap N(A) = R(A^d) \cap N(A)$ (qui est fermé) $\Rightarrow R(A^{d_0}) \cap N(A)$ est fermé. D'autre part $d_0 \in \Delta(A)$, donc d'après [3, Proposition 3.1.1] on a: $R(A) + N(A^d) \subset R(A) + N(A^{d_0})$ et comme $d \geq d_0$ on a alors: $R(A) + N(A^d) = R(A) + N(A^{d_0})$ et par suite $A \in q\phi(d_0)$.

Remarque. Soit A un opérateur fermé dans H tel que $d = \text{dis}(A)$ est fini, alors $\forall m, m \in \Delta(A)$, on a: $R(A) + N(A^d) = R(A) + N(A^m)$.

En effet: d'une part on a $R(A) + N(A^d) \subseteq R(A) + N(A^m)$ (car $m \geq d$). D'autre part $d \in \Delta(A)$, donc d'après [3, Proposition 3.1.1] on a: $R(A) + N(A^m) \subset R(A) + N(A^d)$.

Proposition 2.4. Soit A un opérateur fermé dans H tel que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) A est quasi-Fredholm,
- (ii) $\forall m \in \mathbb{N}^* A^m$ est quasi-Fredholm,
- (iii) Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que A^m est quasi-Fredholm.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii): Posons $d_0 = \text{dis}(A)$ et soit (M, N) une décomposition de Kato associée à A donc on a:

- (a) $H = M \oplus N$,
- (b) $A(M \cap D(A)) \subset M$ et $(A|_M)$ est régulier,
- (c) $A(N) \subset N \subset D(A)$ et $A|_N$ est nilpotent de degré d_0 .

Or on a $A^m(M \cap D(A^m)) \subset A(M \cap D(A)) \subset M$ et $A^m(N) \subset A(N) \subset N$. D'après [5, Proposition 3.7] on a $(A^m|_M) = (A|_M)^m$ est régulier. De même $(A^m|_N)$ est nilpotent de degré 1 si $d_0 \leq m$, de degré k si $m \leq d_0$ où k est tel que $(k-1)m \leq d_0 \leq km$. Par suite (M, N) est une décomposition de Kato associée à A^m . Donc A^m est quasi-Fredholm.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): C'est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Soit $d = \text{dis}(A^m)$ alors d'après le lemme 2.1 on a: $\text{dis}(A) \leq md \Rightarrow md \in \Delta(A)$.

Montrons que $R(A^{md}) \cap N(A)$ est fermé dans H : On a $R(A^{md}) \cap N(A) = R(A^{md}) \cap N(A^m) \cap N(A)$ (car $N(A) \subset N(A^m)$), or $R(A^{md}) \cap N(A^m)$ est fermé dans H car $d = \text{dis}(A^m)$, et $N(A)$ est fermé, donc $R(A^{md}) \cap N(A)$ est fermé dans H . Montrons maintenant que $R(A) + N(A^{md})$ est fermé dans H . Soit $(y_p + x_p)_{p \in \mathbf{N}} \subset R(A) + N(A^{md})$, $y_p + x_p \rightarrow z$, $z \in H$. Donc il existe $t_p \in D(A)$ tel que $y_p = A(t_p)$ et $A^{md}(x_p) = 0$. Comme $\rho(A) \neq \emptyset$, soit $\beta \in \rho(A)$.

Si $\beta = 0$ on a $R(A) = H$ et le résultat est évident.

Si $\beta \neq 0$ alors $A^{m-1} = (A - \beta I + \beta I)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (A - \beta I)^k$, où les $\{c_k\}_{0 \leq k \leq m-1}$ sont des constantes. Posons $S = (A - \beta I)^{-1}$. Alors $A^{m-1} S^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k S^{m-1-k}$ est borné. Donc on a $A^{m-1} S^{m-1}(A(t_p) + x_p) \rightarrow A^{m-1} S^{m-1}(z)$. Or

$$\begin{aligned} A^{m-1} S^{m-1}(A(t_p)) &\in R(A^m) \text{ et } A^{m-1} S^{m-1}(x_p) \in N(A^{md}) \\ \Rightarrow \exists x \in N(A^{md}) \text{ et } \exists t \in D(A^m) \text{ tel que } A^{m-1} S^{m-1}(z) &= A^m(t) + x \\ &\quad (\text{car } R(A^m) + N(A^{md}) \text{ est fermé}) \\ \Rightarrow A^{m-1}(S^{m-1}(z) - A(t)) &= x \Rightarrow A^{md+m-1}(S^{m-1}(z) - A(t)) = 0 \\ \Rightarrow (S^{m-1}(z) - A(t)) &\in N(A^{m(d+1)}). \end{aligned}$$

Comme $md \in \Delta(A)$, alors d'après [3, Proposition 3.1.1] on a: $(S^{m-1}(z) - A(t)) \in R(A) + N(A^{md}) \Rightarrow S^{m-1}(z) \in R(A) + N(A^{md})$. Et comme S est inversible, alors $z \in R(A) + N(A^{md})$. Donc $R(A) + N(A^{md})$ est fermé et par suite A est quasi-Fredholm.

Théorème 2.5. Soit A un opérateur fermé dans H avec $\rho(A) \neq \emptyset$, $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ un polynôme de degré p à coefficients complexes avec $n \geq 2$ et $d \in \mathbf{N}^*$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) $R(P(A)) + N(P(A)^d)$ est fermé,
- (2) $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ est fermé.

Preuve. Supposons que $R(P(A)) + N(P(A)^d)$ est fermé et montrons que $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ est fermé. Soit $x_n \in D(A^{m_i})$ et $y_n \in N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ tel que $(A - \lambda_i I)^{m_i}(x_n) + y_n \rightarrow z$, $z \in H$. Posons $Q(\lambda) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$, alors $Q(\lambda)$ est un polynôme de degré $(p - m_i)$. Comme $\rho(A) \neq \emptyset$, soit $\beta \in \rho(A)$. Posons $C = (A - \beta I)^{-1}$ et $B = Q(A)C^{(p-m_i)}$. Alors

$$\begin{aligned} B &= \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j} \right) C^{(p-m_i)} \\ &= \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n ((A - \beta I) + (\beta - \lambda_j)I)^{m_j} \right) C^{(p-m_i)} = \sum_{k=0}^{(p-m_i)} \alpha_k C^{(p-m_i)-k}, \end{aligned}$$

où les $\{\alpha_k\}_{0 \leq k \leq (p-m_i)}$ sont des constantes. En particulier B est un opérateur borné $\Rightarrow B((A - \lambda_i I)^{m_i})(x_n) + B(y_n) \rightarrow B(z)$. Or

$$\begin{aligned} B((A - \lambda_i I)^{m_i})(x_n) &\in R(P(A)) \text{ et } B(y_n) \in N(P(A)^d) \\ \Rightarrow B((A - \lambda_i I)^{m_i})(x_n) + B(y_n) &\in R(P(A)) + N(P(A)^d). \end{aligned}$$

Or $R(P(A)) + N(P(A)^d)$ est fermé $\Rightarrow B(z) \in R(P(A)) + N(P(A)^d)$. On a $B(z) = Q(A)C^{(p-m_i)}(z)$. Posons

$$\begin{aligned} v &= C^{(p-m_i)}(z) \\ \Rightarrow \exists x \in D(A^p) \text{ et } \exists y \in N(P(A)^d): \\ &\prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(v) = \prod_{j=1}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(x) + y \\ \Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j}(v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) &= y. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} y \in N(P(A^d)) &\Rightarrow y \in D\left(\prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}\right) \\ \Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j + m_j d}(v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) \\ \Rightarrow \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_i I + (\lambda_i - \lambda_j)I)^{m_j + m_j d}(v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) \\ &= \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{(p-m_i)(d+1)} c_k (A - \lambda_i I)^k (v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) \\ &\text{où les } \{c_k\}_{0 \leq k \leq (p-m_i)(d+1)} \text{ sont des constantes et } c_0 \neq 0 \\ \Rightarrow c_0 (v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) &= - \sum_{k=1}^{(p-m_i)(d+1)} c_k (A - \lambda_i I)^k (v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) \\ &\quad + \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y) \\ \Rightarrow c_0 v = (A - \lambda_i I)^{m_i}(c_0 x) &- \sum_{k=1}^{(p-m_i)(d+1)} c_k (A - \lambda_i I)^k (v - (A - \lambda_i I)^{m_i}(x)) \\ &\quad + \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(y). \end{aligned}$$

Par récurrence on montre alors que $\forall k, 1 \leq k \leq m_i$,

$$\begin{aligned} v &\in R((A - \lambda_i I)^k) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \\ &\Rightarrow v \in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \\ &\Rightarrow z \in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \text{ (car } C^{p-m_i} \text{ est inversible)}. \end{aligned}$$

Donc $R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ est fermé.

Supposons maintenant que $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ est fermé, et montrons que $R(P(A)) + N(P(A)^d)$ est fermé. Soit $x_m \in D(P(A))$, $z_m \in N(P(A)^d)$ tel que $y_m = P(A)(x_m) + z_m \rightarrow y$, $y \in H$. De même que précédemment, on pose $Q(\lambda) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda - \lambda_j)^{m_j d}$, alors $Q(\lambda)$ est un polynôme de degré $(p - m_i)d$. Comme $\rho(A) \neq \emptyset$ soit $\beta \in \rho(A)$. Posons $C = (A - \beta I)^{-1}$ et $B = Q(A)C^{(p-m_i)d}$. On a $B = \sum_{k=0}^{(p-m_i)d} \alpha_k C^{(p-m_i)d-k}$ où les $\{\alpha_k\}_{0 \leq k \leq (p-m_i)d}$ sont des constantes. Donc B est un opérateur borné $\Rightarrow B(y_m) \rightarrow B(y)$. Or $B(y_m) = Q(A)C^{(p-m_i)d}(y_m) \in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ qui est fermé $\Rightarrow B(y) = Q(A)C^{(p-m_i)d}(y) \in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$. Posons $u = C^{(p-m_i)d}(y)$. Il existe alors $t \in D(A^{m_i})$ tel que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_j I)^{m_j d}(u) &= (A - \lambda_i I)^{m_i}(t) + x \text{ avec } x \in N((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \\ \prod_{j=1, j \neq i}^n (A - \lambda_i I + (\lambda_i - \lambda_j)I)^{m_j d}(u) &= (A - \lambda_i I)^{m_i}(t) + x \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k u &= (A - \lambda_i I)^{m_i}(t) + x, \text{ où les } \{c_k\}_{0 \leq k \leq (p-m_i)d} \text{ sont} \\ &\text{des constantes et } c_0 \neq 0 \\ \Rightarrow c_0 u &= - \sum_{k=1}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k u + (A - \lambda_i I)^{m_i}(t) + x \\ \Rightarrow u &\in R(A - \lambda_i I) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}). \end{aligned}$$

Donc il existe u_1 dans $D(A)$ et x_0 dans $N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ tel que

$$\begin{aligned} u &= (A - \lambda_i I)(u_1) + x_0 \\ \Rightarrow c_0 u &= - \sum_{k=1}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k (A - \lambda_i I)(u_1) + (A - \lambda_i I)^{m_i}(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{(p-m_i)d} c_k (A - \lambda_i I)^k (x_0) + x \\ \Rightarrow u &\in R((A - \lambda_i I)^2) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}). \end{aligned}$$

Et par récurrence on voit que

$$\begin{aligned} u &\in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \\ \Rightarrow y &\in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}). \end{aligned}$$

D'où il existe $s_1 \in D(A^{m_i})$ et $t_1 \in N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ tel que: $y = (A - \lambda_i I)^{m_i}(s_1) + t_1$. De même on montre qu'il existe s_2 dans $D(A^{m_j})$ et t_2 dans $N((A - \lambda_j I)^{m_j d})$ tel

que

$$\begin{aligned} y &= (A - \lambda_j I)^{m_j}(s_2) + (t_2) \\ &\Rightarrow (A - \lambda_i I)^{m_i}(s_1) + t_1 = (A - \lambda_j I)^{m_j}(s_2) + t_2 \text{ avec } i \neq j \\ &\Rightarrow (A - \lambda_i I)^{m_i}(s_1) + t_1 = ((A - \lambda_i I) + (\lambda_i - \lambda_j)I)^{m_j}(s_2) + t_2. \end{aligned}$$

D'où $\sum_{k=0}^{m_j} c_k (A - \lambda_i I)^k(s_2) + t_2 = (A - \lambda_i I)^{m_i}(s_1) + t_1$, où les $\{c_k\}_{0 \leq k \leq m_j}$ sont des constantes et $c_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow c_0 s_2 = (A - \lambda_i I)^{m_i}(s_1) + (t_1 - t_2) - \sum_{k=1}^{m_j} c_k (A - \lambda_i I)^k(s_2) \\ &\Rightarrow s_2 \in R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}(A - \lambda_j I)^{m_j d}) \\ &\Rightarrow y \in R((A - \lambda_i I)^{m_i}(A - \lambda_j I)^{m_j}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}(A - \lambda_j I)^{m_j d}). \end{aligned}$$

Et par récurrence on voit que $y \in R(P(A)) + N(P(A)^d) \Rightarrow R(P(A)) + N(P(A)^d)$ est fermé dans H .

Et de la même manière, en utilisant les mêmes techniques que dans la démonstration du théorème 2.5, on montre le théorème suivant:

Théorème 2.6. *Soit A un opérateur fermé dans H avec $\rho(A) \neq \emptyset$, $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ un polynôme de degré p à coefficients complexes avec $n \geq 2$ et $d \in \mathbf{N}^*$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $R(P(A)^d) \cap N(P(A))$ est fermé,
- (2) $\forall i, 1 \leq i \leq n, R((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \cap N((A - \lambda_i I)^{m_i})$ est fermé.

3. THÉORÈME DE L'APPLICATION SPECTRALE

Théorème 3.1. *Soit A un opérateur fermé dans H avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ un polynôme de degré p à coefficients complexes. Alors:*

$$0 \in \rho_{q\phi}(P(A)) \Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \rho_{q\phi}(A).$$

Preuve. Si $n = 1$, la proposition 2.4 permet de conclure. Dans tout ce qui suit on supposera donc que $n \geq 2$:

Supposons que $P(A)$ est quasi-Fredholm et montrons que $\forall i, 1 \leq i \leq n, (A - \lambda_i I)$ est quasi-Fredholm. Posons $d = \text{dis}(P(A))$. Si $d = 0$ alors d'après [5, Proposition 5.4] $\forall i, 1 \leq i \leq n, (A - \lambda_i I)$ est quasi-Fredholm de degré 0.

Supposons que $d \geq 1$, et posons $d_i = \text{dis}((A - \lambda_i I)^{m_i})$. Alors d'après le lemme 2.2 on a $\forall i, 1 \leq i \leq n, d_i \leq d \Rightarrow \forall i, 1 \leq i \leq n, d \in \Delta((A - \lambda_i I)^{m_i})$. D'autre part d'après les théorèmes 2.5 et 2.6 on a: $\forall i, 1 \leq i \leq n, R((A - \lambda_i I)^{m_i d}) \cap N((A - \lambda_i I)^{m_i})$ et $R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d})$ sont fermés dans H . Le lemme 2.3 permet alors de conclure que $\forall i, 1 \leq i \leq n, (A - \lambda_i I)^{m_i}$ est quasi-Fredholm, et d'après la proposition 2.4 on a: $\forall i, 1 \leq i \leq n, (A - \lambda_i I)$ est quasi-Fredholm.

Supposons que $\forall i, 1 \leq i \leq n, (A - \lambda_i I)$ est quasi-Fredholm donc d'après la proposition 2.4 on a $\forall i, 1 \leq i \leq n, (A - \lambda_i I)^{m_i}$ est quasi-Fredholm. Soit $d_i = \text{dis}((A - \lambda_i I)^{m_i})$ et $d = \max_{i=1}^n d_i$. D'après le lemme 2.2 on a $\text{dis}(P(A)) = d$. Si $d = 0$ alors d'après [5, Proposition 5.4] $P(A)$ est quasi-Fredholm. Si $d \geq 1$, d'après les théorèmes 2.5 et 2.6 on a: $R(P(A)^d) \cap N(P(A))$ et $R(P(A)) + N(P(A)^d)$ sont fermés, en effet on a: $\forall i, 1 \leq i \leq n, R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d}) = R((A - \lambda_i I)^{m_i}) + N((A - \lambda_i I)^{m_i d_i})$ est fermé. Le lemme 2.3 permet alors de conclure que $P(A)$ est quasi-Fredholm.

Théorème 3.2. *Soit A un opérateur fermé tel que $\rho(A) \neq \emptyset$ et P un polynôme à coefficients complexes. Alors on a :*

$$P(\sigma_e(A)) = \sigma_e(P(A)).$$

Preuve. Montrons que $\sigma_e(P(A)) \subseteq P(\sigma_e(A))$: Soit $\alpha \in \sigma_e(P(A))$. Posons $P(\lambda) - \alpha = (\prod_{i=1}^k (\lambda - \beta_i)^{m_i})$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow P(A) - \alpha I = (\prod_{i=1}^k (A - \beta_i I)^{m_i})$. Comme $\alpha \in \sigma_e(P(A))$ alors $P(A) - \alpha I$ n'est pas quasi-Fredholm. D'après le théorème précédent il existe i , $1 \leq i \leq k$: $(A - \beta_i I)^{m_i}$ n'est pas quasi-Fredholm, et d'après la proposition 2.4 $(A - \beta_i I)$ n'est pas quasi-Fredholm. Donc $\beta_i \in \sigma_e(A)$. Or $\alpha = P(\beta_i) \Rightarrow \alpha \in P(\sigma_e(A))$.

Montrons que $P(\sigma_e(A)) \subseteq \sigma_e(P(A))$: Soit $\alpha \in P(\sigma_e(A)) \Rightarrow \exists t \in \sigma_e(A)$: $\alpha = P(t)$. Posons $P(\lambda) - \alpha = (\lambda - t)^{m_0} Q(\lambda)$ où m_0 est l'ordre de multiplicité de t en tant que racine de $P(\lambda) - \alpha$. On a alors $P(A) - P(t)I = (A - tI)^{m_0} Q(A)$. Comme $t \in \sigma_e(A)$, alors $(A - tI)^{m_0}$ n'est pas quasi-Fredholm et par suite $P(A) - \alpha I$ n'est pas quasi-Fredholm. Or $\alpha = P(t)$, donc $\alpha \in \sigma_e(P(A)) \Rightarrow P(\sigma_e(A)) = \sigma_e(P(A))$.

Corollaire 3.3. *Soit A un opérateur fermé tel que $\rho(A) \neq \emptyset$ et P un polynôme à coefficients complexes n'ayant pas de racines dans $\sigma_e(A)$. Alors $P(A)$ est quasi-Fredholm.*

Lemme 3.4. *Soient A et B deux opérateurs fermés tels que $AB = BA$. Si A est quasi-Fredholm et si B est inversible, alors AB est quasi-Fredholm.*

Preuve. Soit $d = \text{dis}(A)$; Montrons que $d = \text{dis}(AB)$. Soit $y \in R((AB)^d) \cap N(AB)$. On a

$AB = BA$ et B est inversible

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y \in N(A) \text{ et } \exists x \in D(AB^d): (AB)^d(x) = y \\ &\Rightarrow y \in N(A) \text{ et } y = A^d(B^d(x)) \Rightarrow y \in R(A^d) \cap N(A) \\ &\Rightarrow \forall m, m \geq d, y \in R(A^m) \cap N(A) \Rightarrow \exists t \in D(A^m): y = A^m(t) \text{ et } y \in N(AB). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} A^m(t) &= A^m(B^m(B^{-m}(t))) = (AB)^m(B^{-m}(t)) \Rightarrow y \in R((AB)^m) \\ &\Rightarrow \forall m, m \geq d, R((AB)^d) \cap N(AB) \subset R((AB)^m) \cap N(AB), \end{aligned}$$

d'où $d \in \Delta(AB)$.

Si $d = 0 \Rightarrow d = \text{dis}(AB)$.

Si $d > 0$

$$\begin{aligned} &\exists y \in R(A^{d-1}) \cap N(A) \text{ et } y \notin R(A^d) \cap N(A) \\ &\Rightarrow B^{d-1}(y) \in R((AB)^{d-1}) \cap N(AB) \text{ et } B^{d-1}y \notin R((AB)^d) \cap N(AB). \end{aligned}$$

Car sinon $B^{d-1}(y) = B^{d-1}(A^d(B(t)))$, $t \in D((AB)^d) \Rightarrow y = A^d(B(t))$. Absurde. D'où $d = \text{dis}(AB)$.

Montrons que $R((AB)^d) \cap N(AB)$ est fermé dans H : Soit $y_n \in R((AB)^d) \cap N(AB)$ tel que $y_n \rightarrow y$, $y \in H$. On a

$$\begin{aligned} y_n &= (AB)^d(x_n), x_n \in D((AB)^d) \text{ et } AB(y_n) = 0 \\ &\Rightarrow y_n = A^d(B^d(x_n)) \text{ et } A(y_n) = 0, \text{ car } B \text{ est inversible} \\ &\Rightarrow y_n \in R(A^d) \cap N(A) \\ &\Rightarrow y \in R(A^d) \cap N(A) \text{ car } R(A^d) \cap N(A) \text{ est fermé} \\ &\Rightarrow y = A^d(x), x \in D(A^d) \text{ et } A(y) = 0 \\ &\Rightarrow y = A^d B^d(B^{-d}(x)) \text{ et } AB(y) = 0 \Rightarrow y \in R((AB)^d) \cap N(AB). \end{aligned}$$

Et par suite $R((AB)^d) \cap N(AB)$ est fermé.

Montrons maintenant que $R(AB) + N((AB)^d)$ est fermé dans H : Soit $x_n \in D(AB)$, $y_n \in N((AB)^d)$ tel que $AB(x_n) + y_n \rightarrow y \Rightarrow A(B(x_n)) + y_n \rightarrow y$ avec $A^d(y_n) = 0$. Comme $R(A) + N(A^d)$ est fermé $\Rightarrow \exists z \in D(A)$, $t \in N(A^d)$: $y = A(z) + t = AB(B^{-1}(z)) + t$. D'où $y \in R(AB) + N((AB)^d)$ et par suite $R(AB) + N((AB)^d)$ est fermé. Donc AB est quasi-Fredholm.

Théorème 3.5. *Soit A un opérateur borné et f une fonction analytique au voisinage du spectre $\sigma(A)$ de A , alors:*

$$f(\sigma_e(A)) = \sigma_e(f(A)).$$

Démonstration. Soit $\mu \in \sigma_e(A)$, et f une fonction analytique au voisinage de $\sigma(A)$. Alors $f(z) - f(\mu)$ est analytique au voisinage de $\sigma(A)$. Elle y possède un nombre fini de racines (car $\sigma(A)$ est compact), donc:

$$f(z) - f(\mu) = (z - \mu)^{m_0} (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_n)^{m_n} g(z)$$

avec $g(z)$ analytique et ne s'annulant pas sur $\sigma(A)$. Par le calcul fonctionnel (cf. [1]) on a:

$$f(A) - f(\mu)I = (A - \mu I)^{m_0} (A - \lambda_1 I)^{m_1} \dots (A - \lambda_n I)^{m_n} g(A),$$

où $g(A)$ est inversible car g ne s'annule pas dans $\sigma(A)$. Si $f(A) - f(\mu)I$ est quasi-Fredholm, alors d'après le lemme 3.4 $(A - \mu I)^{m_0} (A - \lambda_1 I)^{m_1} \dots (A - \lambda_n I)^{m_n} = (f(A) - f(\mu)I)(g(A))^{-1}$ serait quasi-Fredholm, et d'après le théorème 3.1, $A - \mu I$ est quasi-Fredholm, ce qui est absurde. Donc $f(\mu) \in \sigma_e(f(A)) \Rightarrow f(\sigma_e(A)) \subset \sigma_e(f(A))$.

Réciproquement. Supposons que $\alpha \in \sigma_e(f(A))$ alors $f(A) - \alpha I$ n'est pas quasi-Fredholm. En particulier $f(A) - \alpha I$ n'est pas inversible, il existe alors $\mu \in \sigma(A)$ tel que $f(\mu) = \alpha$. On a: $f(z) - f(\mu) = (z - \mu)^{m_0} (z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_n)^{m_n} g(z)$, où g ne s'annule pas sur $\sigma(A)$. Donc $f(A) - f(\mu)I = (A - \mu I)^{m_0} (A - \mu_1 I)^{m_1} \dots (A - \mu_n I)^{m_n} g(A) = f(A) - \alpha I$. Comme ce dernier n'est pas quasi-Fredholm, alors d'après le théorème 3.1 et le lemme 3.4, $\exists \beta \in \{\mu, \mu_1, \dots, \mu_n\}$ tel que $A - \beta I$ n'est pas quasi-Fredholm $\Rightarrow \beta \in \sigma_e(A)$. Comme $f(\beta) = \alpha$ on a $\alpha \in f(\sigma_e(A))$. D'où $f(\sigma_e(A)) = \sigma_e(f(A))$.

Corollaire 3.6. *Soit A un opérateur borné dans H et f une fonction analytique au voisinage du spectre $\sigma(A)$ de A n'ayant pas de racines dans $\sigma_e(A)$. Alors $f(A)$ est quasi-Fredholm.*

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to express their thanks to the referee whose suggestions led to an important improvement of the paper.

One of the authors (M.B.), an associate member, would like to thank Professor Abdus Salam, the International Atomic Energy Agency and UNESCO for hospitality at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste.

REFERENCES

1. N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators*, Part 1, Wiley-Interscience, New York, 1971. MR **90g**:47001a,b,c
2. T. Kato, *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*, J. Anal. Math. **6** (1958), 261–322. MR **21**:6541
3. J. P. Labrousse, *Les opérateurs quasi-Fredholm une généralisation des opérateurs semi-Fredholm*, Rend. Circ. Math. Palermo (2) **29** (1980), 161–258. MR **83c**:47022
4. M. Mbekhta, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Glasgow Math. J. (1987), 159–175. MR **88i**:47010
5. M. Mbekhta, *Résolvant généralisé et théorie spectrale*, J. Operator Theory **21** (1989), 69–105. MR **91a**:47004

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS, TRIESTE, ITALY

Current address: Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohammed I, Oujda, Morocco

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES, UNIVERSITÉ MOHAMMED I, OUJDA, MOROCCO