EXEMPLES SÉPARANT CERTAINES CLASSES D'ALGÈBRES TOPOLOGIQUES

Z. ABDELALI AND M. CHIDAMI

(Communicated by Dale Alspach)

ABSTRACT. Esterle (1979) and Żelazko (1996 and 1990) gave an example of an algebra which cannot be topologized as a topological algebra (with jointly continuous multiplication), and Müller (in 1991) showed that there exists a topological algebra, which is indeed a locally bounded algebra, which cannot be topologized as a locally convex algebra.

To complete this study on the separation between the classes of algebras, we construct for every $p \in]0, 1]$ a locally bounded algebra which is q -normed for every $q \in]0, \frac{p}{p+2}[$ which cannot be topologized as a locally p -convex algebra, and we deduce an example of a locally pseudoconvex algebra which cannot be topologized as a locally p -convex algebra for every $p \in]0, 1]$. We also show the existence of a topological algebra which cannot be topologized as a locally pseudoconvex algebra.

Tous les espaces vectoriels et les algèbres considérés ici sont réels ou complexes. Une algèbre topologique A est un espace vectoriel topologique séparé muni d'une multiplication associative simultanément continue. On dira que l'algèbre A est localement bornée, localement pseudoconvexe, ... si l'espace vectoriel topologique sous-jacent possède la même propriété. Un espace vectoriel topologique séparé X est dit localement borné ou quasi-normé si la topologie de X est définie par une quasi-norme f , c'est à dire que f est une application sur X non négative qui ne s'annule qu'en zéro, telle que pour un certain $p \in]0, 1]$, pour tout scalaire λ et tout $(x, y) \in X^2$, $f(x + y) \leq 2^{\frac{1}{p}}(f(x) + f(y))$ et $f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$, dans ce cas le sous-ensemble $V = \{x \in X / f(x) \leq 1\}$, qui est un voisinage borné de zéro, vérifie $V + V \leq 2^{\frac{1}{p}+1}V$, ainsi la topologie de X peut être définie par une q -norme pour tout $q \in]0, \frac{p}{p+1}[$ ([3, Theo.1, §2, Chap.III]), rappelons qu'une q -semi-norme $\| \cdot \|$ sur l'espace vectoriel X est une application non négative, sous additive et vérifiant pour tout $x \in X$ et tout scalaire λ , $\|\lambda x\| = |\lambda|^q \|x\|$, si on a en plus $x = 0$ si $\|x\| = 0$ on dira que $\| \cdot \|$ est une q -norme. De plus si (A, f) est une algèbre topologique quasi-normée alors pour tout $q \in]0, \frac{p}{p+1}[$ la topologie de A peut être définie par une q -norme sous-multiplicative.

L'espace X est dit localement p -convexe, $0 < p \leq 1$, (resp. localement pseudoconvexe) si la topologie de X est définie par une famille de p -semi-normes (resp. p_i -semi-normes $p_i \in]0, 1]$, $i \in I$). Remarquons que pour toute p -semi-norme $\| \cdot \|$, l'ensemble absorbant $V = \{x \in X / \|x\| \leq 1\}$ est un p -disque, c'est à dire, pour tout

Received by the editors December 11, 1998 and, in revised form, May 24, 1999 and October 1, 1999.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46J05; Secondary 46J40.

couple de scalaires (λ, β) , $|\lambda|^p + |\beta|^p \leq 1$, $\lambda V + \beta V \subseteq V$ (il est clair que pour tout $q \leq p$, un p -disque est un q -disque). Ainsi, pour qu'une algèbre A soit topologisable comme une algèbre localement p -convexe (resp. localement pseudoconvexe) il faut et il suffit qu'il existe sur A une famille de p -disques (resp. p_i -disques, $p_i \in]0, 1[$) absorbants $(V_i)_{i \in I}$ vérifiant $\bigcap_{i \in I} V_i = \{0\}$ et pour tout $i \in I$, il existe $j_i \in I$ tel que $V_{j_i} + V_{j_i} \subseteq V_i$ et $V_{j_i} V_{j_i} \subseteq V_i$. Rappelons qu'un espace vectoriel topologique séparé X est métrisable si et seulement si X est F-normé (une F-norme $\| \cdot \|$ est une application non négative, sous additive et vérifiant pour tous x et $x_n \rightarrow 0$ dans X et tous scalaires λ et $\lambda_n \rightarrow 0$, $\|\lambda x_n\| \rightarrow 0$ et $\|\lambda_n x\| \rightarrow 0$ et si $|\lambda| \leq 1$, $\|\lambda x\| \leq \|x\|$).

Soit A un espace vectoriel ou une algèbre, pour tout (p, q) , $0 < q < p \leq 1$, si A est p -normé (resp. localement p -convexe), alors A est q -normé (resp. localement q -convexe), et dans tous ces cas A est localement pseudoconvexe. Pour les définitions et les propriétés de ces classes d'espaces et d'algèbres topologiques voir par exemple S. Rolewicz [3], S. Simmons [4], ou le travail de P. Turpin [5] qui contient plus de détail ainsi que des exemples montrant que les inclusions entre ces classes sont strictes.

Le problème de la comparaison entre les classes d'algèbres sous-jacentes à ces classes d'algèbres topologiques (autrement dit, étant donné deux classes d'algèbres topologiques, existe-t-il une algèbre de la classe la plus large qui est non topologisable comme une algèbre de l'autre classe), donne un cadre naturel aux travaux, de Żelazko [6] et [7]¹, et Müller [2], dont on trouve, d'une part, des exemples d'algèbres qui ne peuvent pas être des algèbres topologiques, d'autre part on trouve, dans [2], un exemple d'algèbre topologique, qui est en fait une algèbre localement bornée, qui ne peut être munie d'aucune topologie d'algèbre localement-convexe.

Ici, en donnant un lemme modifiant, pour le nécessaire, des techniques du théorème 2 [2], nous complétons ces travaux en montrant (corollaire 1) que pour tout $p \in]0, 1[$, il existe une algèbre localement bornée (q -normée pour tout $q \in]0, \frac{p}{p+2}[$) complète ne pouvant être munie d'aucune topologie d'algèbre localement p -convexe.

Ainsi, nous déduisons dans le corollaire 2, un exemple d'algèbre localement pseudoconvexe métrisable complète qui ne peut être munie d'aucune topologie d'algèbre localement p -convexe pour tout $p \in]0, 1[$.

Finalement, nous donnons un théorème qui montre l'existence d'une algèbre topologique métrisable complète ne pouvant être munie d'aucune topologie d'algèbre localement pseudoconvexe.

Lemme. *Pour tout $p \in]0, 1[$, il existe une algèbre commutative, localement bornée (q -normée pour tout $q \in]0, \frac{p}{p+2}[$) A_p et un élément non nul $c_p \in A_p$, tels que:*

1. $c_p \cdot A_p = \{0\}$;
2. si V et W sont deux p -disques absorbants tels que $V \cdot V \subseteq W$, $c_p \in W$.

Preuve. Sauf quelques modifications nécessaires la preuve est similaire à celle du théorème 2 [2].

Soient K un ensemble non dénombrable et D l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N} \times K}$ ($\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs non nuls). Pour tout $d \in D$ et tout $(n, k) \in \mathbf{N} \times K$, d_{nk} désignera l'image de (n, k) par d .

Pour tout $d \in D$ et $n \in \mathbf{N}$, il existe un sous-ensemble K_{dn} de K et un élément d_n de $\mathbf{N}$, tels que $\text{card}(K_{dn}) = d_n$ et pour tout $k \in K_{dn}$, $d_n = d_{nk}$.

¹L'exemple [7] peut être déduit du corollaire 2.2 [1] d'Esterle.

Soit A l'espace vectoriel engendré par les symboles : c, x_{nk} ($(n, k) \in \mathbf{N} \times K$), a_d ($d \in D$) et y_{dnk} ($d \in D, n \in \mathbf{N}, k \in K_{dn} \subseteq K$).

On munit A du produit commutatif défini par:

$$cA = y_{dnk}A = \{0\} \quad (d \in D, n \in \mathbf{N}, k \in K_{dn}),$$

$$a_d a_{d'} = 0 \quad ((d, d') \in D),$$

$$x_{nk} x_{n'k'} = 0 \quad ((n, n') \in \mathbf{N}^2, (k, k') \in K^2),$$

$$x_{nk} \cdot a_d = \begin{cases} (d_n)^{\frac{1}{p}} y_{dnk} & \text{si } d \in D, n \in \mathbf{N} \text{ et } k \in K_{dn}, \\ 0 & \text{si } k \notin K_{dn}. \end{cases}$$

Le produit de trois éléments quelconques est nul, ainsi A est une algèbre.

Soit L l'ensemble des fonctions scalaires $\lambda : k \rightarrow \lambda_k$ définies sur K à support fini. D'après le lemme 3 [2], il existe sur L une suite de fonctions réels non négatives $(m_n)_{n+1 \in \mathbf{N}}$ vérifiant $m_{i+j}(\lambda + \beta) \leq m_i(\lambda) + m_j(\beta)$, $m_i(\lambda) \leq m_j(\lambda)$ pour $j \leq i$ et $m_{n_\lambda}(\lambda) = 0$ où $n_\lambda = \text{card}(\{k \in K / \lambda_k \neq 0\})$ (on aura besoin de la définition et les propriétés de $(m_n)_{n+1 \in \mathbf{N}}$ données dans le lemme 3 [2]).

Soit h l'application définie sur L par:

$$h(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i m_i(\lambda) \quad \text{où } u_i = (i+1)^{\frac{2}{p}} - (i)^{\frac{2}{p}} \text{ on a } \frac{u_{2i+1} + u_{2i}}{u_i} = 2^{\frac{2}{p}}.$$

L'application h vérifie $h(\lambda + \beta) \leq 2^{\frac{2}{p}}(h(\lambda) + h(\beta))$. En effet:

$$\begin{aligned} h(\lambda + \beta) &= \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i} m_{i+i}(\lambda + \beta) + \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i+1} m_{i+(i+1)}(\lambda + \beta) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i} (m_i(\lambda) + m_i(\beta)) + \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i+1} (m_i(\lambda) + m_{i+1}(\beta)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (u_{2i} + u_{2i+1}) (m_i(\lambda) + m_i(\beta)) \leq 2^{\frac{2}{p}} (h(\lambda) + h(\beta)). \end{aligned}$$

Soit f la quasi-norme définie sur A par: pour tout $u \in A$ tel que

$$u = \alpha c + \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k \in K} \beta_{nk} x_{nk} + \sum_{d \in D} \gamma_d a_d + \sum_{d \in D} \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k \in K_{dn}} \delta_{dnk} y_{dnk},$$

$$f(u) = |\alpha| + \sum_{n \in \mathbf{N}} h(\{\beta_{nk}\}_{k \in K}) + \sum_{d \in D} |\gamma_d| + \sum_{d \in D} \sum_{n \in \mathbf{N}} \left(\frac{1}{d_n}\right)^{\frac{1}{p}} h(\{\delta_{dnk}\}_{k \in K})$$

en posant $\delta_{dnk} = 0$, pour $k \in K \setminus K_{dn}$.

D'une manière analogue à [2] on montre que la quasi-norme f vérifie:

- $u = 0$ si et seulement si $f(u) = 0$, $f(\lambda u) = |\lambda| f(u)$;
- $f(u + v) \leq 2^{\frac{2}{p}} (f(u) + f(v))$;
- $f(uv) \leq 2^{\frac{2}{p}} f(u) f(v)$.

Ainsi, l'algèbre localement bornée (A, f) est q -normée pour tout $q \in]0, \frac{p}{p+2}[$.

Soit M le sous-espace vectoriel de A engendré par l'ensemble:

$$\{c - (\frac{1}{d_n})^{\frac{1}{p}} \sum_{k \in K_{dn}} y_{dkn} / (d, n) \in D \times \mathbf{N}\}$$

l'espace M est un idéal et si $(d, n) \in D \times \mathbf{N}$, $f((\frac{1}{d_n})^{\frac{1}{p}} \sum_{k \in K_{dn}} y_{dkn}) = 1$, ainsi on montre que M est fermé exactement comme dans le lemme 3 [2]. Soit A_p l'algèbre topologique quotient A/M et soit c_p l'image de c par la surjection canonique, il est clair que $c_p \neq 0$.

La technique utiliser dans la preuve du lemme 5 [2], nous permet de déduire la deuxième assertion de notre lemme, la première assertion étant évidente.

L'algèbre complétée de A_p nous permet de déduire le résultat suivant:

Corollaire 1. *Pour tout $p \in]0, 1]$, il existe une algèbre commutative localement bornée (q -normée pour tout $q \in]0, \frac{p}{p+2}[$) complète ne pouvant être munie d'aucune topologie d'algèbre localement p -convexe.*

Corollaire 2. *Il existe une algèbre commutative localement pseudoconvexe métrisable complète ne pouvant être munie d'aucune topologie d'algèbre localement p -convexe pour tout $p \in]0, 1]$.*

Preuve. Soit A_n ($n \in \mathbf{N}$) une algèbre vérifiant les conditions du corollaire 1, pour $p = \frac{1}{n}$, l'algèbre topologique produit $\prod_{n \in \mathbf{N}} A_n$ répond à la question.

Théorème. *Il existe une algèbre topologique métrisable complète commutative ne pouvant être munie d'aucune topologie d'algèbre localement pseudoconvexe.*

Preuve. Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ la suite d'éléments de $]0, 1]$ définie par:

$$p_0 = 1 \text{ et } p_{n+1} = \frac{p_n}{2(p_n + 2)}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit A_n une algèbre localement bornée et $c_n \in A_n$, tels que A_n et c_n vérifient les conditions de notre lemme pour $p = p_{n-1}$. Soit $\| \cdot \|_n$ une p_n -norme sous-multiplicative définissant la topologie de A_n , en remplaçant l'élément c_n par $(\frac{1}{\|c_n\|_n})^{\frac{1}{p_n}} c_n$, on peut supposer que $\|c_n\|_n = 1$.

Soit B l'algèbre somme directe des algèbres A_n , $n \in \mathbf{N}$, qu'on note:

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n \quad (B = \{u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \prod_{n \in \mathbf{N}} A_n / u_n = 0 \text{ pour } n \geq n_u\})$$

on munit B de la F-norme sous-multiplicative $\| \cdot \|$ définie par:

$$\|(u_n)_{n \in \mathbf{N}}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_n.$$

Soit M le sous-espace vectoriel de B engendré par $\{c_1 - c_n / n \in \mathbf{N}\}$ (nous identifions les algèbres A_n à leurs images canoniques). L'espace M est un idéal de B et $c_1 \notin \overline{M}$ (la fermeture de M dans B). En effet, pour tout $u = \sum_{n=2}^{n_u} \lambda_n (c_1 - c_n) \in M$, $\|u - c_1\| = |1 - (\sum_{n=2}^{n_u} \lambda_n)^{p_1} + \sum_{n=2}^{n_u} |\lambda_n|^{p_n}|$ donc

$$\|u - c_1\| \geq \max\{1 - \sum_{n=2}^{n_u} |\lambda_n|^{p_1} + \sum_{n=2}^{n_u} |\lambda_n|^{p_n}, \max_{2 \leq n \leq n_u} \{|\lambda_n|^{p_n}\}\} \geq 1.$$

Soit A l'algèbre topologique quotient $B/\overline{M}$, et soit c l'image de c_1 par la surjection canonique, évidemment c est l'image de c_n ($n \in \mathbf{N}$) par la surjection canonique et $c \neq 0$. L'algèbre A ne peut être munie d'aucune topologie d'algèbre localement-pseudoconvexe. Sinon, il existera pour un certain $p \in]0, 1]$ deux p -disques absorbant V et W vérifiant: $V.V \subseteq W$ et $c \notin W$.

Soit V' (resp. W') l'image réciproque de V (resp. W) par la surjection canonique, soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $p_{n-1} < p$. Sur l'algèbre A_n les p_{n-1} -disques absorbant $V' \cap A_n$ et $W' \cap A_n$ vérifient les conditions de notre lemme, donc $c_n \in W'$, ainsi $c \in W$ ce qui est absurde. Ceci nous permet de déduire que l'algèbre complétée de l'algèbre topologique A montre le théorème.

REMERCIEMENT

Nous remercions le rapporteur pour ses remarques utiles qui nous ont permis d'améliorer la version de ce papier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Esterle. Sur la métrisabilité de certaines algèbres d'opérateurs. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 24 (1979), pp. 1157-1164. MR **81c**:46002
- [2] V. Müller. On topologizable algebras. Studia. Math 99 (1991), pp. 149-153. MR **92k**:46081
- [3] S. Rolewicz. Metric linear spaces. PWN, Warszawa, 1972. MR **55**:10993
- [4] S. Simmons. Boundedness in linear topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), pp. 169-180. MR **29**:3863
- [5] P. Turpin. Sur une classe d'algèbres topologiques généralisant les algèbres localement bornées, These, Univ de Grenoble, 1966. MR **34**:6566
- [6] W. Żelazko. Concerning topologization of real or complex algebras. Colloq. Math. Nol. 71 (1996), pp. 111-113. MR **97f**:46070
- [7] W. Żelazko. Example of an algebra which is nontopologizable as a locally convex topological algebra. Proc. Amer. Math. Soc 110 (1990), pp. 947-949. MR **91c**:46068
- [8] W. Żelazko. On the locally bounded and m-convex topological algebras, Studia. Math. 19 (1960), pp. 333-356. MR **23**:A4033

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ MOHAMMED V, FACULTÉ DES SCIENCES, B.P 1014 RABAT, MAROC
E-mail address: `zinelab@hotmail.com`

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ MOHAMMED V, FACULTÉ DES SCIENCES, B.P 1014 RABAT, MAROC
E-mail address: `chidami@fsr.ac.ma`