SUR LES ALGÈBRES S -RÉGULIÈRES ET LA S -DÉCOMPOSABILITÉ DES OPÉRATEURS DE MULTIPLICATION

A. DAOUI, H. MAHZOULI, AND E. H. ZEROUALI

(Communicated by David R. Larson)

ABSTRACT. Let A be a commutative Banach algebra and $\Delta(A)$ its maximal ideal space. For given $S \subset \Delta(A)$, we establish necessary and sufficient conditions so that A becomes S -regular. We derive some characterizations of decomposable multiplication operators and a description of the Apostol algebra of A . This provides a class of algebras (including Douglas algebras) for which the Apostol algebra is regular.

1. INTRODUCTION

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur X . Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, on notera $\sigma(T)$ son spectre et R_T sa fonction résolvante définie par $R_T(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma(T)$. Pour tout $x \in X$, on appelle résolvant local de T en x , noté $\rho(x; T)$, l'ouvert maximal sur lequel l'équation $(\lambda - T)f(\lambda) = x$ admet des solutions analytiques; son complémentaire noté $\sigma(x; T)$ est le spectre local de T en x .

On dira que T satisfait la condition (δ) si pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i=1, \dots, n}$ de $\sigma(T)$, il existe $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ une famille de sous-espaces invariants pour T satisfaisant

$$(3.1) \quad \begin{cases} X = X_1 + \dots + X_n, \\ \sigma(x, T) \subseteq O_i \text{ pour tout } x \in X_i \text{ et } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

On dira que T est décomposable si les sous-espaces X_i , $i = 1, \dots, n$, peuvent être choisis fermés.

Soit S une partie d'un espace topologique (Ω, τ) . On considère la topologie associée à S donnée par:

$$\tau^S = \{O \in \tau \text{ tel que } S \subseteq O \text{ ou bien } O \cap S = \emptyset\}.$$

Si (3.1) est satisfaite avec $O_i \in \tau^S$ (τ étant la topologie usuelle de $\mathbf{C}$ et $S \subset \mathbf{C}$) et X_i fermé, pour tout $i = 1, \dots, n$, alors T est dit S -décomposable. Dans le cas où S est l'ensemble vide ou un ensemble totalement discontinu, tout opérateur S -décomposable est décomposable. Lorsque S est le spectre résiduel analytique ($S = S_T$), cette notion coïncide avec la définition de la S -décomposabilité au sens de [17]. La S -décomposabilité et la décomposabilité peuvent se confondre dans

Received by the editors June 29, 2000 and, in revised form, May 19, 2002.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47B40, 47B48; Secondary 47A11.

©2003 American Mathematical Society

des cas où les propriétés spectrales de l'opérateur sont invariantes par rotation. Si on prend les shifts sur des espaces de Beurling étudiés dans [6], on voit qu'ils sont décomposables si et seulement si, ils sont S -décomposables, où S est un sous-ensemble quelconque non trivial fermé du cercle unité.

On étudie dans ce travail la notion de la S -décomposabilité des opérateurs de multiplication sur les algèbres de Banach commutatives semi-simples; on met en évidence le lien avec la régularité de l'algèbre (dans un sens à définir) retrouvant ainsi les résultats de [10] et de [11]. Ceci nous permettra de fournir une autre approche à la solution donnée dans [15] (voir aussi [14]) à un problème de M. Neumann dans le cas des algèbres de Douglas.

Les auteurs tiennent à remercier le referée pour ses remarques et pour avoir signaler le lien avec les résultats de la référence [9]. Ceci a permis d'améliorer le contenu de ce travail.

2. LES ALGÈBRES S -RÉGULIÈRES

On considère dans la suite A une algèbre de Banach commutative semi-simple et $\Delta(A)$ son ensemble de caractères. L'ensemble $\Delta(A)$ est une partie de la boule unité du dual A^* de A . La topologie faible $*$ induit sur $\Delta(A)$ une topologie séparée dite de Gelfand qu'on notera τ_g ; c'est la topologie la moins fine rendant continues les transformées de Gelfand des éléments de A , où la transformée de Gelfand $\hat{a}$ de $a \in A$ est l'application continue sur $\Delta(A)$ définie pour $\phi \in \Delta(A)$ par $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$.

On considère pour $E \subseteq \Delta(A)$, l'idéal fermé

$$k_A(E) = \{a \in A \text{ tel que } E \subseteq \ker(\hat{a})\}$$

et pour I une partie de A l'ensemble,

$$h(I) = \{\phi \in \Delta(A) \text{ tel que } I \subseteq \ker \phi\}.$$

On dira que E est hk_A -fermé si $E = hk_A(E)$. Ceci permet de définir une topologie sur $\Delta(A)$ dite la hk_A -topologie, ou la topologie de Kuratowski notée τ_{hk_A} , qui est moins fine que la topologie de Gelfand. Pour plus de détails voir [8]

Rappelons qu'une algèbre A est dite régulière si pour toute partie fermée $E \subseteq \Delta(A)$ et $\phi \in \Delta(A) \setminus E$, il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $E \subseteq \ker(\hat{a})$; on aura donc $E = hk_A(E)$ pour tout fermé E de $\Delta(A)$ et par suite les deux topologies précédemment définies coïncident. On note $reg(A)$ la plus grande sous-algèbre régulière de A . Si A est semi-simple, alors $reg(A)$ est une partie de $dec(A)$ la sous-algèbre des opérateurs décomposables de A [9], Proposition 4.4.10. M. M. Neumann pose la question suivante dans le cas général des algèbres de Banach.

Question 1. A-t-on $reg(A) = dec(A)$?

On appelle multiplicateur de A tout opérateur borné, $T : A \rightarrow A$, satisfaisant $T(ab) = aT(b)$ pour tout $a, b \in A$. On notera $M(A)$ l'ensemble des multiplicateurs de A . Munie de la composition et de la norme opérateur, $M(A)$ est une sous-algèbre fermée de $L(A)$. Pour $a \in A$, l'opération de multiplication par a , notée M_a , est un multiplicateur et l'application $\Phi : a \in A \mapsto \Phi(a) = M_a \in M(A)$ permet d'identifier A à un idéal fermé de $M(A)$. En particulier, on aura $\Delta(M(A)) = \Delta(A) \cup h(A)$, et lorsque A est une algèbre unitaire, on a $M(A) = A$.

Le lien entre la régularité de A est la décomposabilité des opérations de multiplication a fait l'objet de plusieurs travaux. Pour une étude exhaustive de la

décomposabilité des opérateurs de multiplication, nous renvoyons le lecteur au récent monographie de K. B. Laursen et M. M. Neumann [9] qui contient aussi une bibliographie complète. On regroupe dans le théorème suivant l'essentiel des résultats obtenus dans ce sens.

Théorème 2.1. *Soit A une algèbre de Banach commutative semi-simple. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) A est une algèbre régulière;
- ii) Pour tout $a \in A$, M_a est décomposable;
- iii) Pour tout $a \in A$, $\hat{a}$ est hk_A -continue;
- iv) La topologie de Gelfand et la hk_A -topologie coïncident.

L'implication i) $\Rightarrow$ ii) a été montrée par I. Colojoara et C. Foias [1] et ii) $\Rightarrow$ i) a été montrée par Frunza [3] dans le cas d'une algèbre unitaire, M. M. Neumann a localisé ce résultat dans [13], théorème 1.2, il a montré qu'en fait pour $a \in A$, on a $\hat{a}$ est hk_A -continue sur $\Delta(A)$ si, et seulement si, M_a est décomposable sur A . Ce qui permet d'obtenir le résultat de Frunza et de Colojoara-Foias comme simples conséquences.

Nous adaptons ce résultat à la S -décomposabilité sur A des opérateurs de multiplication. Soit S une partie de $\mathbf{C}$. On dira que $\hat{a}$ est hk_A^S -continue sur $\Delta(A)$ si pour tout $O \in \tau^S$, où τ est la topologie usuelle sur $\mathbf{C}$, $\hat{a}^{-1}(O)$ est hk_A ouvert dans $\Delta(A)$. En reprenant les arguments de la preuve du théorème 1.2 de [13], on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple, $a \in A$ et S une partie de $\mathbf{C}$. Alors $\hat{a}$ est hk_A^S -continue si, et seulement si, M_a est S -décomposable. En particulier, les propositions suivantes sont équivalentes:*

- i) $\hat{a}$ est hk_A^S -continue pour tout $a \in A$;
- ii) $\tau_g^S = \tau_{hk_A}^S$.

On donne alors:

Définition 2.3. Soit A une algèbre de Banach commutative et S une partie de $\Delta(A)$. On dira que A est S -régulière si pour tout $\phi \in \Delta(A) \setminus S$ et V un voisinage de ϕ , il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $\text{supp}(\hat{a}) \subseteq V$.

Soit $S \subset \Delta(A)$ et supposons que l'algèbre de Banach commutative semi-simple A est S -régulière, alors, d'après la proposition 2.2, $\hat{a}$ est $hk_A^{\hat{a}(S)}$ -continue pour tout $a \in A$ (car $S \subset \hat{a}^{-1}(a(S))$); d'où M_a est $\hat{a}(S)$ -décomposable. En notant S_a le plus petit fermé S pour lequel M_a soit S -décomposable, dont l'existence est démontrée dans [12], on aura $\hat{a}^{-1}(S_a) \subset S$ et par suite $\bigcup_{a \in A} \hat{a}^{-1}(S_a) \subset S$. Réciproquement, pour tout $a \in A$ on a, M_a est $\bigcup_{a \in A} \hat{a}(S)$ -décomposable. On déduit le théorème:

Théorème 2.4. *Sous les notations précédentes, posons $S_A = \bigcup_{a \in A} \hat{a}^{-1}(S_a)$, on a*

1. Si A est S -régulière, alors $S_A \subset S$ et M_a est $\hat{a}(S)$ -décomposable pour tout $a \in A$,
2. A est S_A -régulière.

Dans le théorème précédent on établit donc l'existence d'une plus petite partie S_A pour laquelle l'algèbre A soit S_A -régulière. Le cas $S_A = \emptyset$ correspond précisément au cas où A est une algèbre régulière.

Le lemme suivant qui est une version équivalente du corollaire 2.2 donné dans [13], nous permet d'envisager d'étendre les résultats obtenus.

Lemme 2.5. *Si A est une algèbre de Banach semi-simple commutative et I un idéal fermé de A , alors pour tout $a \in I$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) $\hat{a}$ est hk_I -continue;
- ii) $\hat{a}$ est hk_A -continue.

Preuve. On a $\Delta(I) = \Delta(A) \setminus h(I)$; donc $\Delta(I)$ est un ouvert. L'implication directe s'obtient alors par restriction. Réciproquement, supposons que $\hat{a}$ est hk_I -continue et soit O un ouvert de $\mathbf{C}$. Considérons

$$\hat{a}^{-1}(O)_I = \{\phi \in \Delta(I) / \hat{a}(\phi) \in O\},$$

$$\hat{a}^{-1}(O)_A = \{\phi \in \Delta(A) / \hat{a}(\phi) \in O\},$$

$\hat{a}^{-1}(O)_I$ est ouvert dans $\Delta(I)$; il est donc ouvert dans $\Delta(A)$. Pour montrer que $\hat{a}^{-1}(O)_A$ est ouvert dans $\Delta(A)$, on distingue les deux cas suivants:

Si $0 \notin O$, alors $\hat{a}^{-1}(O)_A = \hat{a}^{-1}(O)_I$ est ouvert.

Si $0 \in O$, on aura $\hat{a}^{-1}(O)_A = \hat{a}^{-1}(O)_I \cup h(I)$. Soit $\varepsilon \geq 0$ tel que $D(0, \varepsilon) \subseteq O$. L'ensemble $V_\varepsilon = \{\phi \in \Delta(A) / |\phi(a)| < \varepsilon\}$ est un ouvert de $\Delta(A)$ (complémentaire d'un compact) contenant $h(I)$ et $V_\varepsilon \subseteq \hat{a}^{-1}(O)_A$ qui est par conséquent ouvert.

Proposition 2.6. *Soient I un idéal fermé de A et $a \in I$. Alors*

- 1) *Pour tout $b \in I$, $\text{supp}(\hat{b}) \subseteq \hat{M}_a^{-1}(\sigma(b, M_a))$.*
- 2) *Si M_a est décomposable (sur A) alors $\hat{M}_a|_{\Delta(I)}$ est hk_I -continue.*

Preuve. 1) Soient $\lambda \notin \sigma(b, M_a)$, O un voisinage de λ et F analytique: $O \rightarrow I$ tels que

$$(M_a - \mu)F(\mu) = b \quad (\mu \in O).$$

En appliquant la transformée de Gelfand, on a

$$(\hat{a}(\phi) - \mu)F(\mu)(\phi) = \hat{b}(\phi) \quad \text{pour tout } \phi \in \Delta(I)$$

et par suite on a

$$\hat{M}_a^{-1}(\rho(b, M_a)) \subseteq \text{Ker}(\hat{b});$$

ce qui entraîne que

$$\text{supp}(\hat{b}) \subseteq \hat{M}_a^{-1}(\sigma(b, M_a)).$$

2) Supposons que M_a est décomposable et qu'il existe F fermé de $\mathbf{C}$ tel que $E = \hat{M}_a^{-1}(F)$ ne soit pas hk_I -fermé. Soit $\phi \in hk_I(E) \setminus E$ et $\lambda = \hat{M}_a(\phi) \notin F$. En considérant le recouvrement $\mathbf{C} \setminus \{\lambda\}$ et $\mathbf{C} \setminus F$ de $\mathbf{C}$, on peut trouver I_1 et I_2 , deux sous-espaces invariants par M_a tels que

$$I = I_1 + I_2, \quad \sigma(M_a|_{I_1}) \subseteq \mathbf{C} \setminus \{\lambda\} \quad \text{et} \quad \sigma(M_a|_{I_2}) \subseteq \mathbf{C} \setminus F;$$

en particulier, pour tout $b_1 \in I_1$, on a

$$\sigma(b_1, M_a) \subseteq \sigma(M_a|_{I_1}) \subseteq \mathbf{C} \setminus \{\lambda\};$$

donc, d'après 1),

$$\lambda \notin \sigma(b_1, M_a) \quad \text{et} \quad \phi(b_1) = 0.$$

D'autre part, pour $b_2 \in I_2$, on a $\sigma(b_2, M_a) \cap F = \emptyset$; donc $\phi(b_2) = 0$ ($\phi \in hk_I(E)$). D'où $\phi(b) = 0$ pour tout $b \in I$; ce qui est impossible.

Le théorème suivant donne une nouvelle caractérisation des algèbres S -régulières.

Théorème 2.7. Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple et $S \subseteq \Delta(A)$, hk_A -fermé. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1) A est une algèbre S -régulière;
- 2) Pour tout idéal I tel que $S \subseteq h(I)$, I est une algèbre régulière;
- 3) τ_g^S et $\tau_{hk_A}^S$ coïncident.

Preuve. Pour l'implication directe, soient E fermé de $\Delta(I)$ et $\phi \in \Delta(I) \setminus E$, il existe $a \in A$ tel que $\phi(a) \neq 0$ et $\text{supp}(\hat{a}) \subseteq \Delta(I) \setminus E$. Comme $\phi \in \Delta(I)$, on peut trouver $b \in I$ tel que $\phi(b) \neq 0$. On aura alors

$$\phi(ab) \neq 0, \quad ab \in I \quad \text{et} \quad \text{supp}(\hat{ab}) \subseteq \Delta(I) \setminus E.$$

Réciproquement, soit $\phi \in \Delta(A) \setminus S$. L'algèbre $k(S)$ étant régulière, on peut choisir pour un voisinage arbitraire V de ϕ dans $\Delta(A) \setminus S$, $a \in k(S)$ tel que

$$\phi(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{supp}(\hat{a}) \subseteq V.$$

Exemple 2.8. Notons $D(0, r) := \{z \in \mathbf{C} / |z| < r\}$ et soit

$$A = \{f \in C(\overline{D(0, 2)}) \mid f \text{ holomorphe sur } D(0, 1)\}.$$

Munie de la multiplication ponctuelle et de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{D(0, 2)}\},$$

A est une algèbre de Banach dont l'ensemble des caractères s'identifie à $\overline{D(0, 2)}$. Un calcul direct montre que A est une algèbre $\overline{D(0, 1)}$ -régulière. De plus, en utilisant le principe des zéros isolés pour les fonctions holomorphes, pour tout sous ensemble fermé S de $D(0, 1)$ ayant un point d'accumulation dans $D(0, 1)$, on a $h(k_A(S)) = \overline{D(0, 1)}$; donc l'assertion 2) du théorème est satisfaite alors que A n'est pas S -régulière; il n'existe pas d'ensemble minimal pour 2) dans le théorème précédent. On supposera dans la suite que S est hk_A -fermé.

On retrouve l'ensemble S_A , pour une algèbre de Banach A , d'une autre manière.

Théorème 2.9. Soient $(S_i)_{i \in J}$ une famille d'ensembles dans $\Delta(A)$ telle que A soit S_i -régulière pour tout $i \in J$. Alors A est $\bigcap_{i \in J} S_i$ -régulière. En particulier il existe une plus petite partie S_A telle que A est S_A -régulière.

Preuve. Soient $\phi \notin \bigcap_{i \in J} S_i$ et V un voisinage de ϕ tel que $V \cap (\bigcap_{i \in J} S_i) = \emptyset$. Soient $i \in J$ tel que $\phi \notin S_i$ et $O = V \cap (\Delta(A) \setminus S_i)$; il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $\text{supp} \hat{a} \subseteq O \subseteq V$. Donc A est une $\bigcap_{i \in J} S_i$ -régulière. En considérant la famille

$$F = \{S \mid S \text{ } hk_A\text{-fermé} / A \text{ est } S\text{-régulière}\},$$

on obtient $S_A = \bigcap_{S \in F} S$.

3. LES ALGÈBRES O -ANALYTIQUES

Définition 3.1. Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple et O un ouvert de $\Delta(A)$. A est dite O -analytique si pour tout $a \in A$ et pour tout V ouvert de O on a: $\hat{a} \equiv \text{cte}$ sur V entraîne $\hat{a} \equiv \text{cte}$ sur O .

Proposition 3.2. Soit A une algèbre O -analytique. Alors il existe un plus grand ouvert O_A (au sens de l'inclusion) tel que A est O_A -analytique.

Preuve. Il suffit de prendre la réunion de tous les ouverts O tels que A est O -analytique. On notera O_A cette réunion.

Théorème 3.3. Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple et O un ouvert de $\Delta(A)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) A est O -analytique;
- ii) Pour tout idéal fermé I tel que $O \subseteq \Delta(I)$, I est une algèbre O -analytique.

Preuve. Le résultat s'obtient par hérédité.

Exemple 3.4. L'algèbre donnée dans l'exemple 2.8 est $D(0, 1)$ -analytique, d'après le principe des zéros isolés d'une fonction analytique et on a $O_A = D(0, 1)$.

On va s'intéresser dans la partie suivante aux liens existant entre les algèbres O -analytiques et les algèbres S -régulières.

Proposition 3.5. Soit $O \subset \Delta(A)$ et supposons que A est O -analytique. Alors $O \subset S_A$.

Preuve. Soit $\phi \in \Delta(A)$ et supposons que $\phi \in O \setminus S_A$, puisque A est S_A -régulière, pour tout voisinage V de ϕ dans $\Delta(A)$, il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $\text{supp}(\hat{a}) \subset V$. En prenant V un voisinage strictement inclus dans O , on obtient une contradiction.

Sous des hypothèses supplémentaires, on a

Proposition 3.6. Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple et $a \in A$. Considérons les assertions suivantes:

- 1. M_a est décomposable;
- 2. M_a possède la propriété (δ) ;
- 3. $\hat{a}|_D$ est constante pour tout ouvert connexe D de O_A .

Alors $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.$

Si de plus $hk_A(O_A) = S_A$ alors $3. \Rightarrow 1.$

Preuve. L'implication $1. \Rightarrow 2.$ est triviale.

$2. \Rightarrow 3.$ Soit D un ouvert connexe de O_A et supposons que $\hat{a}$ n'est pas constante sur D . Considérons ϕ_1, ϕ_2 dans D tels que $\hat{a}(\phi_1) \neq \hat{a}(\phi_2)$ et soient O_1, O_2 deux ouverts de $\mathbf{C}$ tels que

$$\mathbf{C} = O_1 \cup O_2, \quad \hat{a}(\phi_i) \in O_i \quad \text{et} \quad \hat{a}(\phi_i) \notin O_1 \cap O_2, \quad i = 1, 2.$$

Comme M_a admet la propriété (δ) , pour tout $b \in A$ il existe b_1, b_2 dans A tel que

$$b = b_1 + b_2 \quad \text{et} \quad \sigma(b_i, M_a) \subseteq O_i, \quad i = 1, 2.$$

D'après [13] (voir aussi [9], Theorem 4.4.5), on a $\sigma(b_i, M_a) = \hat{a}(\text{supp}(\hat{b}_i))$ et alors $\hat{a}(\phi_1) \notin \hat{a}(\text{supp}(\hat{b}_2))$; donc il existe un voisinage ouvert V_1 de ϕ_1 dans D tel que $\hat{b}_2|_{V_1} \equiv 0$; ce qui implique que $\hat{b}_2|_D \equiv 0$. On montre de même que $\hat{b}_1|_D \equiv 0$. D'où $\hat{b}|_D \equiv 0$; ce qui est absurde.

$3. \Rightarrow 1.$ Si $hk_A(O_A) = S_A$ alors pour tout $a \in A$ tel que $\hat{a} \equiv \text{cste}$ sur tout ouvert connexe de O_A , $\hat{a}$ est hk_A -continue sur $\Delta(A)$. Donc d'après le théorème 2.1, M_a est décomposable.

Remarque 3.7. En suivant les notations l'exemple 4.4.14 de [9], pour K un compact de $\mathbf{C}$, l'algèbre $A := R(K)$ désigne la fermeture dans $C(K)$ des fonctions rationnelles dont les pôles sont dans $\mathbf{C} \setminus K$. Si $O \subset K$ est un ouvert connexe, alors on a clairement $O \subset O_A$, d'autre part d'après le théorème de Mergelyan. Si $\mathbf{C} \setminus K$ est une réunion finie de composantes connexe, alors $A = A(K)$ ce qui donne

$K = O_A$. Dans [2] Eschmeier et Putinar donnent un ensemble K tel que $\text{int}(K) = \emptyset$ et $R(K)$ non régulière. En particulier, on aura $O_A = \emptyset \neq S_A$.

Notons que l'exemple 2.8 peut s'écrire dans ce contexte de la manière suivante.

Exemple 3.8. Soit $B_n = B(z_n, r_n)$ une famille de boules ouvertes deux à deux disjointes du disque unité D , avec $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes de D qui converge vers un élément de Γ et $(r_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs qui converge vers 0 et soit

$$A = \{f \in C(\overline{D}) : f|_{B_n} \text{ est holomorphe, pour tout } n\}.$$

Alors l'algèbre A est O_A -analytique et S_A -régulière pour $O_A = \bigcup_n B_n$ et $S_A = \bigcup_n \overline{B_n}$. De plus, $hk(O_A) = S_A$ et on a

$$\text{reg}A = \text{dec}A = \{f \in C(\overline{D}) : f|_{B_n} \equiv \text{cste, pour tout } n\}.$$

4. SUR LA SOUS-ALGÈBRE D'APOSTOL ET $\text{reg}(A)$

Etant donnée une algèbre A , on note $\text{reg}(A)$ la plus grande sous-algèbre régulière de A et $\text{dec}(A)$ la sous-algèbre dite d'Apostol, formée des éléments a de A tels que M_a soit décomposable. En général on a $\text{reg}(A) \subset \text{dec}(A)$ [10]. La question de savoir si on a égalité est toutefois toujours ouverte. Divers résultats partiels ont été obtenus; la réponse est affirmative dans certaines algèbres de convolution [10] et dans les algèbres de Douglas sur le cercle unité Γ (sous-algèbres uniformes de $L^\infty(\Gamma)$ contenant strictement $H^\infty(D)$) [15], [14]. Dans ce paragraphe, on donne une approche nouvelle à la question.

Lemme 4.1. Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple et $(C_i)_{i \in J}$ une famille d'ouverts connexes de $\Delta(A)$, deux à deux disjoints. Considérons la sous-algèbre de Banach

$$B := \{a \in A \text{ tel que } \hat{a}|_{C_i} \equiv \text{cste pour tout } i \in J\}$$

alors

$$\Delta(B) = (\Delta(A) \setminus \bigcup_{i \in J} \overline{C_i}) \cup (\bigcup_{i \in J} \{\xi_i\}) \quad \text{où } \xi_i \in C_i.$$

Preuve. Remarquons que le choix de $\xi_i \in C_i$ ne pose pas d'ambiguïté; en effet si $\xi_1, \xi_2 \in C_i$, on aura $\xi_{1|B} = \xi_{2|B}$.

Soit $I := h(\bigcup_{i \in J} \overline{C_i})$, l'idéal fermé de A formé des éléments dont la transformée de Gelfand s'annule sur $\bigcup_{i \in J} \overline{C_i}$. Pour $\xi \in \Delta(B)$, on distingue deux cas:

- $\xi|_I \neq 0$, soit alors $b \in I$ tel que $\xi(b) \neq 0$, on prolonge alors ξ à A de façon classique $\xi(a) = \frac{\xi(ab)}{\xi(b)}$ et on aura $\xi \in \Delta(A)$. Puisque $\xi|_I \neq 0$, on a $\xi \in \Delta(A) \setminus \bigcup_{i \in J} \overline{C_i}$.
- $\xi|_I = 0$ et soit $b \notin I$ tel que $\xi(b) \neq 0$; on peut trouver $i \in J$ tel que $\hat{b}|_{C_i} \neq 0$. Soit $\xi_i \in C_i$, on aura $\xi_i(b) = \xi(b) \neq 0$. Comme $A = \ker(\xi_i) \oplus \mathbb{C}b$, on pose $\tilde{\xi}(a + \lambda b) = \lambda \xi_i(b)$ pour tout $a + \lambda b \in A$; ce qui permet d'identifier ξ et $\xi_i \in \Delta(A)$.

Lemme 4.2. Sous les notations précédentes, supposons que $hk_A(O_A) = S_A$. Pour $k \in 0, 1$, soient $J_k \subset J$ et F_k deux fermés disjoints de $\Delta(A)$ tels que $\bigcup_{i \in J_k} \overline{C_i} \subset F_k$ et $F_k \cap \bigcup_{i \in J_{1-k}} \overline{C_i} = \emptyset$, alors il existe $b \in B$ tel que $\hat{b}|_{F_0} \equiv 1$ et $\hat{b}|_{F_1} \equiv 0$.

Preuve. L'algèbre A étant $hk_A(O_A)$ -régulière, les ensembles F_k , $k = 0, 1$, sont hk_A -fermés; ce qui donne

$$h(k(F_0) + k(F_1)) \subset h(k(F_0)) \cap h(k(F_1)) = F_0 \cap F_1 = \emptyset.$$

Puisque $k(F_0) + k(F_1)$ est un idéal, on obtient $A = k(F_0) + k(F_1)$ et par suite il existe $b_k \in F_k$, $k = 0, 1$ tels que $b_1 + b_2 = 1$. Finalement b_1 répond au lemme.

La proposition suivante traite du cas où $hk_A(O_A) = S_A$.

Proposition 4.3. *Soit A une algèbre de Banach commutative semi-simple. Si $hk_A(O_A) = S_A$ alors $reg(A) = dec(A)$.*

Preuve. D'après la proposition 3.6, on a

$$dec(A) = \{a \in A \mid \hat{a} \equiv cste \text{ sur tout ouvert connexe de } O_A\}.$$

En écrivant $O_A = \bigcup_{i \in J} C_i$ où les ouverts C_i sont les composantes connexes de O_A , on obtient d'après le lemme 4.1,

$$\Delta(dec(A)) = (\Delta(A) \setminus \bigcup_{i \in J} \overline{C_i}) \cup (\bigcup_{i \in J} \{\xi_i\}) \quad \text{où } \xi_i \in C_i;$$

ce qui implique, d'après le lemme 4.2, que $dec(A)$ est une sous-algèbre régulière de A . Puisque $reg(A)$ est maximal, on a

$$reg(A) = dec(A) = \{a \in A \mid \hat{a} \equiv cte \text{ sur tout ouvert connexe de } O_A\}.$$

5. REMARQUES

Dans la proposition 4.3, on construit une famille d'algèbres qui donne une réponse positive à la question de [10]. Nous développons l'idée principale de la preuve dans la suite de ce paragraphe.

5.1. Algèbres niveaux. La notion d'algèbre niveau a été introduite dans [9] de la manière suivante. Soient A une algèbre de Banach commutative et $S \subset A$, l'ensemble de niveau de S sur $\phi \in \Delta(A)$ est défini par, $K_\phi(S) = \{\psi \in \Delta(A) : \psi|_S = \phi|_S\}$, si A n'est pas unitaire $K_\infty(S) = \{\psi \in \Delta(A) : \psi|_S = 0\}$. L'algèbre niveau de S est $Lev(S) = \{a \in A : \hat{a}|_{K_\phi(S)} = \phi(a) \text{ pour tout } \phi \in \Delta(A) \text{ et } \hat{a}|_{K_\infty(S)} = 0\}$. Il est clair que $K_\phi(A) = \{\phi\}$ pour tout $\phi \in \Delta(A)$ et que $lev(A) = A$. Notons A_{lev} la famille des sous algèbres B de A qui satisfont $lev(B) = B$. Alors A_{lev} contient $dec(A)$ et $reg(A)$ ([9], Theorem 4.4.17). Une étude détaillée de A_{lev} serait intéressante. Par exemple

Question 2. Quelles sont les algèbres A dont toute sous algèbre est dans A_{lev} ?

Il est clair que si A est O -analytique $B \in A_{lev}$ est une sous-algèbre régulière, alors $\hat{a}$ est constante sur toute composante connexe de O . En particulier, en vertu de la preuve de la proposition 4.3 on a $B \subset dec(A)$. Notons aussi que sous les conditions et les notations de la proposition 4.3, on a $K_\phi(dec(A)) = K_\phi(reg(A)) = C_i$ pour tout $\phi \in C_i$.

5.2. Algèbres de Douglas. Soient $L^\infty(\Gamma)$ l'algèbre de Banach des fonctions essentiellement bornée et H^∞ la sous algèbre fermée des fonctions holomorphe sur le disque unité. Une sous-algèbre B de $L^\infty(\Gamma)$ est dite de Douglas si elle contient H^∞ strictement. Il est connu que toute algèbre de Douglas admet une mesure représentative unique sur sa frontière de Shilov ∂B et que ∂B coïncident avec la frontière de Shilov de $L^\infty(\Gamma)$. Le fait que toute algèbre de Douglas contient $H^\infty + C(T)$, où $C(T)$ est la sous-algèbre des fonctions continues sur Γ est aussi un résultat classique. Pour plus de détail sur les algèbres de Douglas, voir [4].

Soient B une algèbre de Douglas B , ∂B sa frontière de Silov et $x \in \Delta(B)$, il existe une mesure représentative μ_x sur ∂B telle que

$$f(x) = \int_{\partial B} f d\mu_x.$$

D'après [15], lemme 2, on déduit que B est $\text{int}(\text{supp}\mu_x)$ -analytique, pour tout $x \in \Delta(B)$. Donc B est $[\bigcup_{x \in \Delta(B)} \text{int}(\text{supp}\mu_x)]$ -analytique. Dans ce cas, on a $O_B = \bigcup_{x \in \Delta(B)} \text{int}(\text{supp}\mu_x)$ et $S_B = \bigcup_{x \in \Delta(B)} \text{supp}\mu_x$. En appliquant le fait qu'une fonction $f \in B$ et qui s'annule sur un ouvert qui rencontre $\text{supp}\mu_x$ satisfait $f(x) = 0$ ([5], p. 190), on déduit que $hk(O_B) = S_B$. Par suite $\text{reg}(B) = \text{dec}(B) = \{f \in B/f|_{\text{supp}\mu_x} = \text{cte sur tout } x \in \Delta(B)\}$. Ainsi on retrouve le résultat de [15] et [14].

REMERCIEMENT

Le troisième auteur a été soutenu par le centre Abdus salam de Trieste où une partie de ce travail a été réalisée. Il tient à remercier le Professeur C.E.Chidume pour ses encouragements.

REFERENCES

1. I. Colojoara and C. Foias: Theory of Generalized Spectral Operators. Gordon and Breach, New York, 1968. MR **52**:15085
2. J. Eschmeier and M. Putinar: On quotients and restrictions of generalized scalar operators. J. Funct. Anal. 84 (1989), 115-134. MR **90h**:47060
3. S. Frunza: A characterization of regular Banach algebras. Rev. Romaine Math. Pures Appl. 18(1973), 1057-1059. MR **48**:2771
4. J. B. Garnett, Bounded analytic functions. Academic Press, New York, 1981. MR **83g**:30037
5. K. Hoffman: Banach spaces of analytic functions. New York (1988), Reprint of 1962. MR **92d**:46066
6. H. Mahzouli and E. H. Zerouali: Classes de Shifts décomposables sur les espaces de Beurling. Arch. der Math. 76 (2001), 127-132. MR **2001m**:47060
7. R. Lange and S. W. Wang: New approaches in spectral decomposition. Contemporary Mathematics 128, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1992). MR **93i**:47039
8. R. Larsen: An introduction of theory of multipliers, New York, Heidelberg, Berlin, 1971. MR **55**:8695
9. K. B. Laursen and M. M. Neumann: An introduction to local spectral theory, London Mathematical Society Monographs, New series 20, Oxford (2000). MR **2001k**:47002
10. K. B. Laursen and M. M. Neumann: Decomposable multipliers and applications to harmonic analysis. Studia Math. 101 (1992), 193-214. MR **93a**:46102
11. K. B. Laursen and M. M. Neumann: Local spectral properties of multipliers on Banach algebras. Arch. Math. 58 (1992), 368-375. MR **93e**:46058
12. B. Nagy: A strong spectral residuum for every closed operators. Illinois J. Math. 24 (1980), 173-179. MR **81f**:47036
13. M. M. Neumann: Commutative Banach algebras and decomposable operators. Monatsh. Math. 113 (1992), 227-243. MR **93e**:46056
14. O. Hatori. K. Izuchi: Apostol algebras and decomposition in Douglas algebras. Michigan Math. Journal 44 (1997), 435-449. MR **99c**:46058

15. R. Mortini: Decomposable multiplication operators. Arch. Math. 72 (1999), 64-67. MR **2000i**:46043
16. C. E. Rickart: General theory of Banach algebras. Princeton, Toronto, London, 1960. MR **22**:5903
17. F. H. Vasilescu: Analytic Functional Calculus and Spectral decompositions, Editura Academiei and D. Reidel Publishing Company, Bucuresti and Dordrecht, 1982. MR **85b**:47016

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE, BP
1014 AGDAL, RABAT, MOROCCO

E-mail address: `daoui@fsr.ac.ma`

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE, BP
1014 AGDAL, RABAT, MOROCCO

E-mail address: `houssame.mahzouli@caramail.com`

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE, BP
1014 AGDAL, RABAT, MOROCCO

E-mail address: `zerouali@fsr.ac.ma`