DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE DER UNTER- MANNIGFALTIGKEITEN DES R_n KONSTANTER KRÜMMUNG*

BY
WALTHER MAYER

EINLEITUNG: DIE STELLUNG DES PROBLEMS

Wie eine Strecke durch ihre Länge, ein Dreieck durch seine Seiten und eine Kurve durch ihre Bogenlänge und die Krümmungen bis auf eine Kongruenz-Transformation im R_n konstanter Krümmung bestimmt sind, so ist auch die e -dimensionale Fläche (F_e , $e=1, 2, \dots, n-1$) des R_n konstanter Krümmung durch ein System von invarianten Formen bis auf ihre Lage im R_n festgelegt.

Wir meinen damit den Kongruenz-Satz:

Kongruente F_e haben gleiche Formen-Systeme und umgekehrt.

Zu der Aufgabe der Herstellung eines die F_e vollständig bestimmenden Formen-Systems tritt ganz natürlich die, *die Bedingungen dafür anzugeben, dass es zu einem gegebenen System von Formen eine F_e dieses Formen-Systems gibt.* (Für die F_2 des euklidischen R_3 : die Gauss'schen resp. Codazzi'schen Relationen.)

Die beiden so skizzierten Probleme wurden 1924 von C. Burstin und dem Verfasser gelöst (das zweite Problem für das vollständige System der "Massensensoren"); die Darstellung (siehe Duschek-Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, in der Folge als *Lehrbuch* zitiert) benutzt aber Hilfs-Beine, die die Normal-Vektorräume der F_e aufspannen, und die zwar ohne Schaden eingeführt werden können, aber als "fremdes Element" einen Schönheitsfehler für die Darstellung bedeuten.

In der nun vorliegenden Arbeit wird dieser "Schönheitsfehler" beseitigt.† Die neue Darstellung hat damit den Vorzug, mit den Koordinaten des Raumes R_n und den Parametern der Fläche F_e allein auszukommen: Bein-Indizes gibt es keine.

Es ist natürlich klar, dass sich in dieser Darstellung dann alle geometrischen Verhältnisse im Formalismus klarer zu erkennen geben, unverwischter, da zwischen Objekt und Symbol sich nichts fremdes mehr einschleibt.

* Presented to the Society, April 20, 1935; received by the editors December 12, 1934.

† Es soll damit nicht behauptet sein, dass die ursprüngliche Darstellung (*Lehrbuch*) nun überflüssig geworden ist, da gerade für die Behandlung spezieller Probleme sich die Einführung von Hilfs-Beinen als zweckmässig erweist.

Die vorliegende Arbeit hat bereits einen Vorgänger: Eine mit C. Burstin gemeinsam verfasste, aber vom Schreiber allein ausgearbeitete Schrift (Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 35 (1928), pp. 87–110: *Über das vollständige Formensystem . . .*) enthält eine solche Hilfs-Bein-freie Darstellung der Theorie.

Methodische Unzulänglichkeiten aber, aus dem natürlichen Bestreben entstanden, für die Darstellung der Vektoren von Vektorräumen ausschliesslich *unabhängige* Basis-Vektoren zu verwenden, hatten eine Unsymmetrie in der Behandlung gleichartiger Objekte zur Folge, die nicht in der Natur des Problems liegt.

Es galt also das Widerstreben zu beseitigen, eine nicht linear unabhängige Vektor-Basis für die Beschreibung zu verwenden, und damit jenes Basis-Bein voll zu benutzen, das sich völlig natürlich dem Geometer darbietet.

Eine Neubearbeitung der erwähnten Schrift erschien uns auch umso erstrebenswerter, als die hier gebotene Theorie keine triviale Verallgemeinerung der Verhältnisse des Dreidimensionalen darstellt, sondern im Gegenteil ganz neue Erkenntnisse vermittelt.

Dies klar hervortreten zu lassen war auch unser Hauptbestreben. Wir gingen daher auch viel genauer ein auf die geometrische Natur aller auftretenden Grössen, als dies in der erwähnten Schrift und in der Darstellung des *Lehrbuchs* geschah.

Es war dabei nicht immer leicht, sich der Lockung eines allzuliebevollen Eingehens in die Details zu entziehen, doch geschah dies im Interesse der Einheitlichkeit der Darstellung.

Was das verwendete Formen-System betrifft, so kann eine solches auch für die F_* eines beliebigen Riemannschen Raumes definiert werden (Schlussparagraph).*

Da es aber in einem solchen Raume den Begriff einer Kongruenz nicht gibt, so hat das so definierte Formen-System keine besonders tiefe Bedeutung.

Aus didaktischen Gründen werden in der vorliegenden Arbeit (wie im *Lehrbuch*) zuerst die Verhältnisse im Euklidischen besprochen. Der Leser braucht dann, sobald rechtwinklige kartesische Koordinaten eingeführt werden, von einem "verallgemeinerten Ricci-Kalkül" nichts zu wissen.

Es genügen gerade jene Kenntnisse des Tensor-Kalküls, die dem feldtheoretisch orientierten mathematischen Physiker heutzutage geläufig sind.

Den R_n konstanter Krümmung erledigen wir im Schlussparagraphen.

* I. A. Schouten und E. R. van Kampen, *Über die Krümmung einer V_m in V_n* , Mathematische Annalen, vol. 105 (1931).

1. DIE SCHMIEG- UND NORMAL-VEKTORRÄUME DER F_e IM EUKLIDISCHEN R_n

Wie in der Einleitung erwähnt, benutzen wir in unserer Darstellung die sogenannten rechtwinklig-kartesischen Koordinaten zur Beschreibung des euklidischen R_n . Die zulässigen Koordinatentransformationen, nämlich die, welche den Masstensor

$$(1) \quad g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases}$$

numerisch invariant lassen, nennt man orthogonale Transformationen. Als Punkt-Transformationen aufgefasst, stellen sie die Kongruenz-Transformationen des euklidischen R_n dar.

Die F_e liege in der Parameterdarstellung vor

$$(2) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_e) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Was Stetigkeit und Differenzierbarkeit der in der Folge auftretenden Funktionen betrifft, so setzen wir sie voraus, soweit unser Problem es erheischt. Es wäre ja von gar keinem Nutzen, den Gedankengang jedesmal zu unterbrechen, um diese differentialgeometrisch unwesentlichen Voraussetzungen an jeder Stelle genau zu fixieren.

Wir betrachten nun den beliebigen Punkt P der F_e ; in ihm sind durch die e Raum-Vektoren*

$$(3) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \quad (p = 1, \dots, e)$$

ein l -Bein aufgespannt: *der erste Schmieg-Vektorraum oder Tangential-Vektorraum I_1 der F_e .*

Der Tangential-Vektorraum I_1 hängt von der Wahl der Flächenparameter $(y_1, \dots, y_e)$ nicht ab. Ist nämlich

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{y}_p &= \bar{y}_p(y_1, \dots, y_e), \\ y_p &= y_p(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_e) \end{aligned}$$

* Wenn wir von einer geometrischen Grösse als Raum-Tensor sprechen, so meinen wir den Transformationscharakter bei Veränderung der Raumkoordinaten allein (also bei Fixierung der Flächenparameter $y_1, \dots, y_e$).

Ebenso wollen wir von einer Grösse als Flächen-Tensor sprechen, sobald wir ihren Transformationscharakter bei Veränderung der Flächenparameter allein beschreiben.

So werden wir ein und dieselbe Grösse je nach Notwendigkeit einmal als Raum-Tensor und einmal als Flächen-Tensor ansprechen.

Wenn der gemeinte Tensorcharakter aber ohne weiteres einzusehen ist, werden wir die nähere Angabe (Raum- resp. Flächentensor) späterhin unterlassen. (Also besonders bei jenen Grössen, die nur Raum- oder nur Flächenindizes enthalten.)

eine Parametertransformation, so folgt aus

$$(5) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_r} \frac{\partial \bar{y}_r}{\partial y_p}$$

sofort die Identität der Vektorräume

$$(6) \quad \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} \right\}.$$

Als Flächengrößen aufgefasst, d.h. bei Transformation der y , sind die $\partial x_i / \partial y_p$ ($i = 1, \dots, n$) ein System von n kovarianten (Flächen) Vektoren. Der zweite Schmiege-Vektorraum I_{12} im Punkte P der F_s ist definiert durch Gesamtheit der Raum-Vektoren

$$(7) \quad \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_p}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \right\}.$$

Wie der Tangential-Vektorraum I_1 ist auch dieser Vektorraum von der Wahl der Flächenparameter unabhängig.

In der Tat gilt ja neben (5) das durch Differentiation von (5) abgeleitete System

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q} &= \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial^2 y_r}{\partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_s} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p} \frac{\partial y_s}{\partial \bar{y}_q}, \\ \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} &= \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_r} \frac{\partial^2 \bar{y}_r}{\partial y_p \partial y_q} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{y}_r \partial \bar{y}_s} \frac{\partial \bar{y}_r}{\partial y_p} \frac{\partial \bar{y}_s}{\partial y_q}. \end{aligned}$$

Aber aus (5) und (8) folgt die Invarianz des I_{12} gegen Parametertransformationen.

Die Relationen (5) und (8) sind nur Spezialfälle einer durch Rekursion herzuleitenden allgemeinen Formel

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{p_1} \dots \partial \bar{y}_{p_h}} &= \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_h}} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial \bar{y}_{p_1}} \dots \frac{\partial y_{r_h}}{\partial \bar{y}_{p_h}} + \sum_{k=1}^{h-1} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} (\dots), \\ \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} &= \frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{r_1} \dots \partial \bar{y}_{r_h}} \frac{\partial \bar{y}_{r_1}}{\partial y_{p_1}} \dots \frac{\partial \bar{y}_{r_h}}{\partial y_{p_h}} + \sum_{k=1}^{h-1} \frac{\partial^k x_i}{\partial \bar{y}_{r_1} \dots \partial \bar{y}_{r_k}} (\dots). \end{aligned}$$

Definieren wir als *kten Schmiege-Vektorraum* $I_{12} \dots_k$ den Vektorraum

$$(10) \quad \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2}}, \dots, \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \right\}$$

so folgt aus (9) für $h = 1, 2, \dots, k$ die Invarianz des $I_{12} \dots_k$ gegenüber Parametertransformation.

Nachdem wir so die (invarianten) Schmiege-Vektorräume im Punkt P der F_* definiert haben, kommen wir zu weiteren (invarianten) Vektorräumen, den *Normal-Vektorräumen der F_** .

Die Schmiege-Vektorräume sind so definiert, dass der $I_{12} \dots k$ den $I_{12} \dots k-1$ enthält.

Die Gesamtheit der Vektoren des $I_{12} \dots k$ die auf den $I_{12} \dots k-1$ normal stehen, bildet ebenfalls einen linearen Vektorraum, den wir den *Normal-Vektorraum I_k der F_* nennen*.

So ist der I_2 definiert als der grösste Unter-Vektorraum des I_{12} , der auf den Tangential-Vektorraum I_1 normal steht u. s. w.

Wir führen jetzt die folgende Bezeichnung ein:

Die Projektion irgend eines im Punkte P der F_* definierten Raum-Vektors λ_i ($i=1, \dots, n$) in den Vektorraum $I_{12} \dots k$ (resp. I_k) bezeichnen wir $\underline{\lambda}_{i12 \dots k}$ (resp. $\underline{\lambda}_{i_k}$).

Den Raum-Vektor

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}}$$

aber werden wir in der Folge stets ohne das am Querstrich angehängte k , also

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}}$$

schreiben.

Betrachten wir jetzt die Relation (9) als eine zwischen den Raum-Vektoren, die in ihr auftreten, so ergibt die Projektion in den I_h -Vektorraum, da dieser zum $I_{12} \dots h-1$ normal steht:

$$(11) \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{p_1} \dots \partial \bar{y}_{p_h}} = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_h}} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial \bar{y}_{p_1}} \dots \frac{\partial y_{r_h}}{\partial \bar{y}_{p_h}},$$

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} = \frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{r_1} \dots \partial \bar{y}_{r_h}} \frac{\partial \bar{y}_{r_1}}{\partial y_{p_1}} \dots \frac{\partial \bar{y}_{r_h}}{\partial y_{p_h}}.$$

Die Raum-Vektoren

$$(12) \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}}$$

die ersichtlich den I_k -Vektorraum aufspannen, verhalten sich also in bezug auf die Transformation der y wie ein System von n ($i=1, \dots, n$) symmetrischen kovarianten Flächentensoren *hter Stufe*.

(Die oben gegebene Konstruktion der Normal-Vektorräume der F_* ,

durchgeführt für die F_1 (Kurve), führt natürlich auf ihre Normal-Vektoren.) Bei der Konstruktion der $I_{12\dots k}$ -Schmiege-Vektorräume werden wir einmal zu einem $I_{12\dots m}$ gelangen, der Eigenschaft

$$(13) \quad \begin{aligned} I_{12\dots m} &\not\equiv I_{12\dots m-1}, & \text{aber} \\ I_{12\dots m+1} &\equiv I_{12\dots m}. \end{aligned}$$

Wir nennen dann $I_{12\dots m}$ den "letzten" oder "grössten" Schmiege-Vektorraum der F_e . In der Tat folgt aus (13)

$$(14) \quad I_{12\dots m+2} \equiv I_{12\dots m+1} \equiv I_{12\dots m} \quad \text{u. s. w.}$$

Ist $I_{12\dots m}$ der letzte Schmiege-Vektorraum, so folgt aus der zweiten Gleichung (13)

$$(15) \quad I_{m+1} \equiv 0,$$

d. h. der I_{m+1} ist leer, er existiert nicht. Ebenso folgt aus (14) $I_{m+2} \equiv 0$ u. s. w.

Wir können statt (15) auch schreiben

$$(16) \quad \frac{\partial^{m+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{m+1}}} \equiv 0$$

und in der Folge

$$(17) \quad \frac{\partial^N x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_N}} \equiv 0 \quad \text{für } N > m.$$

Das Raum-Vektorbein

$$(18) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2}}, \dots, \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_m}}$$

nennen wir kurz eine *Basis der Schmiege-Vektorräume der F_e* . In Bezug auf die Transformationen der Parameter stellt die Basis ein System von kovarianten und symmetrischen Flächentensoren erster bis m ter Stufe dar.

2. DAS SYSTEM DER GRUNDFORMEN DER F_e ; DIE MASSENSOREN DER I_h -RÄUME

Ein Raum-Vektor, der ganz im I_h liegt, hat als Darstellung

$$(1) \quad \lambda_i = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} l^{p_1 \cdots p_h}.$$

Die Darstellungsgrößen $l^{p_1 \cdots p_h}$, die wir symmetrisch in allen Indizes wählen, bilden ihrem Transformationscharakter nach einen *symmetrischen kontravarianten Flächentensor h ter Stufe*.

Ein solcher Tensor hat

$$L_h = \binom{e + h - 1}{h}$$

verschiedene Komponenten.

Da im allgemeinen die den I_h aufspannenden Raumvektoren

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}$$

nicht linear unabhängig sein werden, hat auch der Nullvektor ($\lambda_i = 0$) Darstellungen

$$(2) \quad 0 = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \theta^{p_1 \cdots p_h}$$

mit $\theta^{p_1 \cdots p_h}$, die nicht alle verschwinden. Die Anzahl linear unabhängiger Lösungen von (2), d_h , ist gegeben durch

$$(3) \quad d_h = L_h - l_h,$$

wenn l_h die Dimension des I_h ist, d. h. der Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \right\|.$$

In der Darstellung (1) des Vektors λ_i des I_h sind die $l^{p_1 \cdots p_h}$ bis auf eine additive *Null Lösung* $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ von (2) bestimmt.

Für die Länge $(\lambda_i \lambda_i)^{1/2}$ des Vektors λ_i gibt (1)

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_i \lambda_i &= \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}} l^{p_1 \cdots p_h} l^{q_1 \cdots q_h} \\ &= E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} l^{p_1 \cdots p_h} l^{q_1 \cdots q_h}, \end{aligned}$$

wo der kovariante Flächentensor

$$(5) \quad E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}}$$

nach (4) der Masstensor für die durch die $l^{p_1 \cdots p_h}$ dargestellten Vektoren des I_h ist. Der Masstensor (5) enthält nur Flächen-Indizes mehr, er ist in den

(durch den Querstrich getrennten) beiden Indizes- h -Tupel symmetrisch und ausserdem symmetrisch in bezug auf die Indizes eines jeden der beiden h -Tupel. Da er zudem als inneres Produkt zweier Raum-Vektoren bei orthogonalen (Kongruenz) Transformationen invariant bleibt, so folgt, dass kongruente Flächen F_* äquivalente Masstensoren der I_h Räume haben (d. h. bei geeigneter Wahl der Parameter gleiche Masstensoren).

Multiplizieren wir (2) mit

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}}$$

so gewinnen wir

$$(6) \quad 0 = E_{q_1 \cdots q_h | p_1 \cdots p_h} \theta^{p_1 \cdots p_h}.$$

Somit ist jede Null Lösung $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ von (2) eine Lösung von (6). Ist dann umgekehrt der Tensor $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ eine Lösung von (6), so folgt nach Multiplikation mit $\theta^{q_1 \cdots q_h}$ nach (5)

$$(7) \quad \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}} \theta^{q_1 \cdots q_h} \right) \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \theta^{p_1 \cdots p_h} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \theta^{p_1 \cdots p_h} \right)^2, \end{aligned}$$

d. h. es gilt (2).

Wir haben damit das wichtige Resultat gewonnen:

Die Gleichungen (2) und (6) für die $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ haben dieselben Lösungen.

Das bedeutet aber, dass die Matrizen*

$$(8) \quad \left\| \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \right\| \quad \text{und} \quad \| E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} \|$$

den gleichen Rang haben: Die Dimension des I_h -Vektorraums l_h ist also zugleich der "Rang" des Masstensors $E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h}$ dieses Vektorraums. Ist $I_{12 \cdots m}$ der letzte Schmiege-Vektorraum, so ist das vollständige System der Masstensoren der F_* das System der m Tensoren

$$(9) \quad E_{p_1 | q_1}, E_{p_1 p_2 | q_1 q_2}, \cdots, E_{p_1 \cdots p_m | q_1 \cdots q_m}.$$

Der symmetrische Masstensor des I_1

* In der Matrix $\| E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} \|$ entspricht einem bestimmten p -Tupel eine Zeile und einem bestimmten q -Tupel eine Spalte.

$$(10) \quad E_{p|q} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_i}{\partial y_q}$$

ist der metrische Tensor der F_* (als l -dimensionaler Riemannscher Raum betrachtet).

Wir werden im Folgenden zeigen können, dass die Masstensenoren (9) die F_* bis auf ihre Lage im R_n , also bis auf Kongruenz, bestimmen. Aber wir zeigen mehr!

Definieren wir nämlich durch

$$(10') \quad E_{p_1 \dots p_k | p_{k+1} \dots p_{2k}} l^{p_1} \dots l^{p_{2k}} = B_{p_1 \dots p_{2k}} l^{p_1} \dots l^{p_{2k}}$$

die in allen Indizes $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ symmetrischen kovarianten Flächentensenoren, die Grundtensenoren $B_{p_1 \dots p_{2k}}$, $k=1, 2, \dots, m$, so können wir zeigen, dass bereits durch die Grundtensenoren

$$(11) \quad B_{pq} = E_{p|q}, \quad B_{p_1 \dots p_4}, \quad \dots, \quad B_{p_1 \dots p_{2m}}$$

die F_* bis auf Kongruenz festgelegt ist.

Der Vergleich der Koeffizienten von $l^{p_1} \dots l^{p_{2k}}$ in (10) führt auf

$$(12) \quad (2k)! B_{p_1 \dots p_{2k}} = \sum E_{c_1 \dots c_k | c_{k+1} \dots c_{2k}},$$

wo in der Summe rechts die $c_1, c_2, \dots, c_{2k}$ alle $(2k)!$ Permutationen von $p_1 p_2 \dots p_{2k}$, also auch gleiche, durchlaufen.*

3. DIE FRENET-GLEICHUNGEN FÜR DIE F_* DES R_n

Um das in der Einleitung gestellte Problem zu lösen, müssen wir ein System totaler Differential-Gleichungen für die Grössen

$$(1) \quad x_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p}, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_m}$$

als Funktionen der $y_1, \dots, y_m$ aufstellen: die Frenet-Gleichungen der F_* .

* In der Tat: Enthält $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ der Reihe nach $a, b, \dots, f$ gleiche Indizes, so ist

$$\frac{(2k)!}{a! b! \dots f!} B_{p_1 \dots p_{2k}}$$

der Koeffizient von $l^{p_1} \dots l^{p_{2k}}$ in (10') rechts.

Der entsprechende Koeffizient links hat die Form der rechten Seite von (12), wobei aber in der Summe nur die verschiedenen Permutationen von $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ auftreten. Da aber die rechte Seite diese $(a! b! \dots f!)$ -fach enthält, ist

$$\frac{1}{a! b! \dots f!} \sum E_{c_1 \dots c_k | c_{k+1} \dots c_{2k}}$$

der Faktor links.

Für x_i gilt

$$(2) \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} dy_p.$$

Wir gehen nun daran, die Differentiale der übrigen Grössen der Reihe (1) zu bestimmen.

Aus der Formel

$$(3) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} + \text{Vektor des } I_{12 \dots k-1}$$

gewinnen wir

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) = \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_t} + \text{Vektor des } I_{12 \dots k}.$$

Somit gibt die Projektion in den I_{k+1}

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) = \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_t},$$

$\text{----- } k+1$

und in den I_{k+r} , $r=2, 3, \dots$,

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) = 0 \quad (r = 2, 3, \dots).$$

$\text{----- } k+r$

Also gilt die Darstellung für den Raum-Vektor

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) : \\ \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) = \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{r_1}} + \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 r_2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{r_1} \partial y_{r_2}} \\ + \dots + \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_k} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}.$$

Wir zeigen weiter, dass in (7)

$$(7') \quad \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_t} \frac{\partial^t x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_t}} = 0 \quad \text{ist für } t = 1, 2, \dots, k-2.$$

Aus

$$(8) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}} = 0,$$

für $h=1, 2, \dots, k-2$ (allgemein für $h \neq k$) folgt durch Differentiation

$$(8') \quad \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}} \\ = - \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}} \right), \text{ für } h = 1, 2, \dots, k-2.$$

Nach (7) ist

$$\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}} \right)$$

ein Raum-Vektor des $I_{12 \dots h+1}$, also wegen $h=1, 2, \dots, k-2$, ein Raum-Vektor des $I_{12 \dots k-1}$.

Dagegen liegt

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}$$

im I_k . Da aber die Vektorräume $I_{12 \dots k-1}$ und I_k normal stehen, ist die rechte Seite (8') und somit die linke Seite (8') Null. Multiplizieren wir also (7) mit

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_h}} \quad (h = 1, 2, \dots, k-2),$$

so erhalten wir

$$(9) \quad \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_h} E_{r_1 \dots r_h | s_1 \dots s_h} = 0.$$

Aus (9) aber folgt nach §2 die Behauptung (7').

Wir schreiben somit statt (7)

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) = \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_{k-1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{k-1}}} \\ + \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_k} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}.$$

Für $k=m$ tritt noch hinzu §1 (16)

$$(10') \quad \frac{\partial^{m+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{m+1}}} = 0.$$

Wir können nun das System der Frenet-Gleichungen der F_* anschreiben:

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial y_p} dy_p, \\ d\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right) &= \left(\Gamma_{pq}^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right) dy_q, \\ &\vdots \\ d\left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}\right) &= \left(\Gamma_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}^{r_1 \cdots r_{k-1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{k-1}}} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}^{r_1 \cdots r_k} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}\right) dy_{p_{k+1}}, \\ (11) \quad &\vdots \\ d\left(\frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_m}}\right) &= \left(\Gamma_{p_1 \cdots p_m p_{m+1}}^{r_1 \cdots r_{m-1}} \frac{\partial^{m-1} x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{m-1}}} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{p_1 \cdots p_m p_{m+1}}^{r_1 \cdots r_m} \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_m}}\right) dy_{p_{m+1}}. \end{aligned}$$

Die in (11) auftretenden Koeffizienten

$$(12) \quad \Gamma_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}^{r_1 \cdots r_{k-1}}, \quad \Gamma_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}^{r_1 \cdots r_k},$$

seien in den oberen Indizes symmetrisch angenommen; sie sind bis auf Null Lösungen $\theta^{r_1 \cdots r_{k-1}}$ resp. $\theta^{r_1 \cdots r_k}$ von

$$\frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_k} \cdots \partial y_{r_{k-1}}} \theta^{r_1 \cdots r_{k-1}} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} \theta^{r_1 \cdots r_k} = 0$$

fixiert.

Ausser der (angenommenen) Symmetrie in den oberen Indizes folgt für die Grössen (12) die Symmetrie in den ersten k unteren Indizes aus (11). Was nun den Charakter der Grössen (12) in bezug auf Parametertransformation betrifft (Raumtransformationen lassen sie invariant), untersuchen wir einen längs eines Kurvenstücks der F_* definierten Raum-Vektor λ_i des I_h

$$(13) \quad \lambda_i = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} l^{p_1 \cdots p_h}.$$

Bilden wir $d\lambda_i$, so gewinnen wir nach (11)

$$(14) \quad \begin{aligned} d\lambda_i &= \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{h-1}}} \Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}^{r_1 \cdots r_{h-1}} l^{p_1 \cdots p_h} dy_{p_{h+1}} \\ &+ \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} (dl^{r_1 \cdots r_h} + \Gamma_{p_1 \cdots p_h t}^{r_1 \cdots r_h} l^{p_1 \cdots p_h} dy_t) \\ &+ \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+1}}} l^{p_1 \cdots p_h} dy_{p_{h+1}}. \end{aligned}$$

Da $d\lambda_i$ invariant in bezug auf eine Parameteränderung ist, und die

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}, \quad l^{p_1 \cdots p_k}$$

symmetrische Tensoren in bezug auf diese Transformationen sind, folgt, dass (bis auf ihre Unbestimmtheit) die

$$\Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}^{r_1 \cdots r_{h-1}}$$

Tensoren sind, wogegen die

$$\Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}^{r_1 \cdots r_h}$$

den Charakter von Christoffel-Symbolen haben.

In der Tat ist mit dem symmetrischen Tensor $l^{r_1 \cdots r_h}$ nach (14)

$$(15) \quad dl^{r_1 \cdots r_h} = dl^{r_1 \cdots r_h} + \Gamma_{p_1 \cdots p_h t}^{r_1 \cdots r_h} l^{p_1 \cdots p_h} dy_t$$

ebenfalls ein symmetrischer Tensor, den wir das I_k -Differential von $l^{r_1 \cdots r_h}$ nennen wollen.

Will man die Relation (10) in eine Form bringen, die auch den tensoriellen Charakter der in ihr eintretenden Grössen in bezug auf die Parametertransformationen zur Geltung kommen lässt, hat man zu schreiben

$$(16) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) - \Gamma_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}^{r_1 \cdots r_k} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} \\ &= \Gamma_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}^{r_1 \cdots r_{k-1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{k-1}}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}. \end{aligned}$$

Mit der rechten Seite hat jetzt auch die linke Seite Tensorcharakter sowohl in bezug auf die x - als auch auf die y -Transformationen.

Das Differential des Raumvektors λ_i des I_h liegt nach (14) nicht im I_h mehr. Dagegen gilt für seine Projektion in den I_h (14), (15)

$$(17) \quad \frac{d\lambda_i}{\longrightarrow_h} = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}} D l^{r_1 \cdots r_h}.$$

Das Verschwinden der I_h -Ableitung des Darstellungstensors $l^{r_1 \cdots r_h}$ eines Vektors λ_i des I_h bedeutet also, dass der Raumzuwachs $d\lambda_i$ auf den I_h normal steht. Einen Vektor λ_i des I_h dieser Eigenschaft nennen wir I_h -parallel.

Die I_1 -Parallelverschiebung ist die von Levi-Civita.

In derselben Art, in der wir die I_h -Parallelverschiebung definierten, können wir eine Parallelverschiebung für Raum-Vektoren beliebiger Vektorräume definieren. Ist z. B. jetzt λ_i ein Vektor des $I_{12 \dots h}$, so definiert

$$(18) \quad \frac{d\lambda_i}{\longrightarrow_{12 \dots h}}$$

das $I_{12 \dots h}$ -Differential von λ_i . Wir nennen λ_i nun $I_{12 \dots h}$ -parallel, längs einer Kurve der F_s , wenn längs dieser das $I_{12 \dots h}$ -Differential (18) verschwindet, also, wenn der räumliche Zuwachs von λ_i längs dieser Kurve stets normal steht zum $I_{12 \dots h}$. Die näheren Ausführungen bringen wir im §6.

■ Zuvor aber seien einige für diese Zwecke notwendigen Formeln hergeleitet. Ist in (13) $\lambda_i = 0$, also $l^{p_1 \cdots p_h} = \theta^{p_1 \cdots p_h}$, so gibt (14) ($\tilde{\theta}$ bedeuten Nulltensoren):

$$(19) \quad \Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}^{r_1 \cdots r_{h-1}} \theta^{p_1 \cdots p_h} = \tilde{\theta}_{(p_{h+1})}^{r_1 \cdots r_{h-1}},$$

$$(20) \quad d\theta^{r_1 \cdots r_h} + \Gamma_{p_1 \cdots p_h}^{r_1 \cdots r_h} \theta^{p_1 \cdots p_h} dy_i = \tilde{\theta}^{r_1 \cdots r_h}$$

und

$$(21) \quad \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+1}}} \theta^{p_1 \cdots p_h} = 0, \text{ resp. } E_{a_1 \cdots a_{h+1} | p_1 \cdots p_h p_{h+1}} \theta^{p_1 \cdots p_h} = 0,$$

welche Relationen für jede Null Lösung $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ gelten von

$$(22) \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \theta^{p_1 \cdots p_h} = 0.$$

4. BERECHNUNG DER IN DEN FRENET-GLEICHUNGEN EINTRETENDEN Γ -KOEFFIZIENTEN UND DER MASSTENSOREN DER I_h -RÄUME AUS DEN GRUNDFORMEN DER F_e . BEWEIS DER THEOREME

Die innere Orientierung des Basis-Beins des $I_{12} \dots m$

$$(1) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2}}, \dots, \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_m}}$$

d. h. die Längen und Winkel der Raum-Vektoren (1) ist völlig bestimmt durch das System

$$(2) \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} = 0, \quad \text{für } h \neq k,$$

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_h}} = E_{p_1 \dots p_h | q_1 \dots q_h}.$$

Wenn wir die Koeffizienten Γ der Frenet-Gleichungen und die Masstensoren E aus den Grundformen berechnet haben, so können wir das System der Frenet-Gleichungen als System totaler Differentialgleichungen für die Größen

$$(1') \quad x_i, \frac{\partial x_i}{\partial y_p}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2}}, \dots, \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_m}}$$

betrachten mit dem System (2) als zusätzliche Bedingungen (Nebenbedingungen). Wir haben zwei Probleme zu lösen.

Das erste ist der Beweis des *Kongruenz Satzes*:

Kongruente F_e haben gleiche Grundformen und umgekehrt sind F_e mit gleichen Grundformen kongruent.

Um das zu zeigen, genügt es zu wissen, dass die Koeffizienten der Frenet-Gleichungen wie die in (2) eintretenden E -Größen durch die Grundformen eindeutig bestimmt sind.*

In der Tat folgt aus der Definition der Grundformen als innere Produkte von Raumvektoren ohne weiteres, dass kongruente F_e dieselben Grundformen haben. Haben aber zwei F_e gleiche Grundformen, und bestimmen diese eindeutig die Γ und E , so haben sie dasselbe System der Frenet-Gleichungen mit Nebenbedingungen (2).

Wir können also durch eine Kongruenztransformation erreichen, dass die

* Die Γ natürlich nur bis auf ihre Unbestimmtheit (Nulltensor), die in das Frenet-System wegen der Nebenbedingung (2) aber nicht mehr eintritt.

eine F_* in eine solche Lage kommt, dass in einem gemeinsamen Punkt der beiden F_* die Basis-Beine (1) zur Deckung kommen.

Wir haben damit zwei Lösungen (die erste F_* und die kongruent verpflanzte zweite) des Frenet-Systems mit gleichen Anfangsbedingungen.

Diese zwei Lösungen müssen daher ganz zusammenfallen (die Stetigkeit der Γ vorausgesetzt).

Damit ist das Kongruenztheorem bewiesen.

Unser zweites Problem ist zu zeigen, dass es zu gegebenen Grundformen, wenn gewisse (in der Folge abgeleitete) Bedingungsrelationen zwischen den Komponenten dieser Grundformen erfüllt sind, stets F_* dieser Grundformen gibt.

Um das zu zeigen, muss man aus der Theorie totaler Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen folgendes wissen:

Unser System (2) stellt die Nebenbedingungen dar, die dem System (1') der Lösungen des Frenet-Systems auferlegt sind, damit die integrierte F_* die gegebenen Grundformen hat.

Die sogenannten Integrabilitätsbedingungen des Frenet-Systems stellen wieder Gleichungen zwischen den Grössen (1') dar, also weitere Bedingungen, die, wenn (2) die einzigen Nebenbedingungen sein sollen, eine Folge von (2) sein müssen.

Unter dem *abgeleiteten System* des Systemes (2) verstehen wir jenes, das durch Differentiation des Systemes (2) unter Verwendung des Frenet-Systems entsteht. Da auch das abgeleitete System die Form von Gleichungen zwischen den Grössen (1') hat, muss es eine Folge des Systemes (2) sein, wenn dieses das alleinige System der Nebenbedingungen ist.

Aus der Theorie totaler Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen aber wissen wir, dass wir, wenn sowohl die Integrabilitätsbedingungen als auch das abgeleitete System der Nebenbedingungen eine Folge der Nebenbedingungen sind, das System für solche Anfangswerte lösen können, die den Nebenbedingungen genügen. Die integrierte Lösung erfüllt dann in ihrem ganzen Geltungsbereich die Nebenbedingungen.

Wir haben also zu zeigen, dass wir die E und Γ so berechnen, dass bei Erfüllung gewisser Bedingungen zwischen den Komponenten der Grundformen, die Integrabilitätsbedingungen und das abgeleitete System aus (2) eine Folge von (2) sind.

Wir betrachten zuerst das aus (2) abgeleitete System:

Für $k = h \pm 2, h \pm 3, \dots$ u. s. w. erhalten wir aus dem Frenet-System §3 (11) und (2)

$$(3) \quad d \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_k}} \right) = 0.$$

Das abgeleitete System dieses Teilsystems von (2) ist also von selbst eine Folge von (2).

Dagegen folgt aus

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_{k+1}}} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_{k+1}}} \\
 &+ \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_{k+1}}} \right)
 \end{aligned}$$

wegen (2) und §3 (11):

$$(5) \quad 0 = E_{p_1 \cdots p_k | q_1 \cdots q_{k+1}} + \Gamma_{q_1 \cdots q_{k+1} t}^{r_1 \cdots r_k} E_{r_1 \cdots r_k | p_1 \cdots p_k}.$$

Das System (5) ist für eine gegebene F_s erfüllt. Wir werden es zur Berechnung der E und Γ -Größen zu verwenden haben. Sofern dann die berechneten E und Γ das System nicht *identisch* erfüllen, stellt es *Bedingungsgleichungen für die Grundformen* dar. Ist (5) erfüllt, so ist die aus (2) für $k=h-1$ abgeleitete Gleichung eine Folge von (2).

Wir haben jetzt noch das aus der zweiten Relation des Systemes (2) abgeleitete System zu betrachten. Wir erhalten aus

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \frac{\partial}{\partial y_t} E_{p_1 \cdots p_k | q_1 \cdots q_k} = \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \right) \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_k}} \\
 &+ \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_k}} \right)
 \end{aligned}$$

wegen (2) und §3 (11)

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} E_{p_1 \cdots p_k | q_1 \cdots q_k} - \Gamma_{p_1 \cdots p_k t}^{r_1 \cdots r_k} E_{r_1 \cdots r_k | q_1 \cdots q_k} - \Gamma_{q_1 \cdots q_k t}^{r_1 \cdots r_k} E_{r_1 \cdots r_k | p_1 \cdots p_k} = 0.$$

Diese Gleichung ist für eine gegebene F_s erfüllt. (Sie sagt aus, dass die I_h -Ableitung des Masstensors des I_h verschwindet.)

Wir verwenden (7) wie (5) zur Berechnung der E und Γ und es gilt für (7), was wir für (5) schrieben.

Ist (7) erfüllt, so ist die aus der zweiten Relation (2) abgeleitete Gleichung eine Folge von (2).

Unser Resultat lautet:

Gelten die Relationen (5) und (7), so ist das aus (2) abgeleitete System eine Folge von (2).

Die Gleichungen (5) und (7) genügen allein noch nicht zur Berechnung der E und Γ , wohl aber zusammen mit den Integrabilitätsbedingungen des Frenet-Systems.

Die Berechnung geschieht schrittweise, ausgehend von der Integrabilitätsbedingung der ersten der Frenet-Gleichungen §3 (11).

Diese Integrabilitätsbedingung wird unter Verwendung des Frenet-Systems aus

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right) - \frac{\partial}{\partial y_p} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_q} \right) = 0$$

gewonnen. Sie lautet

$$(8') \quad \Gamma_{pq}^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} = \Gamma_{qp}^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_p},$$

und zerfällt als Folge von (2) in

$$(9) \quad (\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{qp}^r) \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = 0$$

und

$$(9') \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_p} = 0.$$

Die Relation (9') ist als Folge von (2) erfüllt. In der Tat ist ihre linke Seite, multipliziert mit $\partial^2 x_i / \partial y_r \partial y_s$, wegen (2) und der Symmetrie Eigenschaft der $E_{pq|rs}$ Null. Also verschwindet auch der absolute Betrag des Raum-Vektors der linken Seite von (9') und somit dieser Vektor selbst als Folge von (2).

Multipliziert man (9) mit $\partial x_i / \partial y_s$ so gibt das nach (2)

$$(9'') \quad (\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{qp}^r) E_{r|s} = (\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{qp}^r) B_{rs} = 0.$$

Ist (9'') erfüllt, dann gilt (§2) (9). Also ist (9) eine Folge von (2), sobald (9'') gilt. Von der ersten Grundform B_{rs} , der Massform der F_* wird $|B_{pq}| \neq 0$ vorausgesetzt.*

Dann ist (9'') äquivalent

$$(9''') \quad \Gamma_{pq}^r = \Gamma_{qp}^r.$$

* Eine Voraussetzung, die für die gegebene F_* natürlich erfüllt ist.

Diese Relation zusammen mit (7) für $k=1$ gestattet aber (bekanntlich) die Berechnung der Γ_{pq}^r .

In der Tat lautet (7) für $k=1$:

$$(10) \quad \partial E_{p|q} / \partial y_t = \Gamma_{pt}^r E_{r|q} + \Gamma_{qt}^r E_{r|p}.$$

Setzen wir

$$\partial E_{p|q} / \partial y_t = (pqt)$$

so gilt (9''')

$$(11) \quad \begin{aligned} (pqt) - (tpq) + (qtp) &= (\Gamma_{pt}^r + \Gamma_{tp}^r) E_{r|q} + (\Gamma_{qt}^r - \Gamma_{tq}^r) E_{r|p} + (\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{qp}^r) E_{r|t} \\ &= 2\Gamma_{pt}^r E_{r|q}. \end{aligned}$$

Wegen $|E_{r|q}| \neq 0$ aber erhalten wir aus (11) die Γ_{pt}^r als die bekannten Christoffelgrößen für den Masstensor

$$(12) \quad B_{pq} = E_{p|q}.$$

Wir haben damit als Resultat:

Aus der Integrabilitätsbedingung der ersten Gleichung des Frenet-Systems und (7) für $k=1$ konnten wir die in der zweiten Gleichung des Frenet-Systems auftretenden Γ als Funktion der $B_{pq}=E_{p|q}$ allein berechnen. (Da $|B_{pq}| \neq 0$ angenommen wurde, ist $\|\partial x_i / \partial y_t\|$ vom Range l (§2 (8).) Wir konstatieren nochmals, dass die bei dieser Berechnung benutzte Integrabilitätsbedingung eine Folge des Systems (2) ist.

Wir könnten bereits hier den allgemeinen (Rekursions)-Schluss durchführen, wollen aber des besseren Verständnis wegen vorerst noch den zweiten Schritt in unserer Schlussfolge tun, d. h. die Integrabilitätsbedingung der zweiten Gleichung des Frenet-Systems zur Berechnung des Masstensors $E_{a|b|c|d}$ des I_2 und der Γ Koeffizienten der dritten Gleichung des Frenet-Systems heranziehen.

Wir haben also aus §3 (11)

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y_q} \left[\frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right) \right] = 0$$

zu berechnen. Wir erhalten für den ersten Term in (13)

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{pq}^r}{\partial y_t} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \Gamma_{pq}^r \left(\Gamma_{rt}^s \frac{\partial x_i}{\partial y_s} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_t} \right) + \Gamma_{pqt}^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \\ + \Gamma_{pqt}^{rs} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} + \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_p \partial y_q \partial y_t}. \end{aligned}$$

Bilden wir (13), so zerfällt dieses System wegen (2) in

$$(15) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \Gamma_{pq}^r - \frac{\partial}{\partial y_q} \Gamma_{pi}^r + \Gamma_{pq}^s \Gamma_{st}^r - \Gamma_{pi}^s \Gamma_{sq}^r + \Gamma_{pqt}^r - \Gamma_{ptq}^r \right) \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = 0,$$

$$(16) \quad (\Gamma_{pq}^r \delta_i^s - \Gamma_{pi}^r \delta_q^s + \Gamma_{pqt}^{rs} - \Gamma_{ptq}^{rs}) \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} = 0,$$

und

$$(17) \quad \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_p \partial y_q \partial y_i} - \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_p \partial y_i \partial y_q} = 0.$$

Die Relation (17) ist eine Folge von (2). Der Beweis ist analog dem für die entsprechende Behauptung (9') betreffend.

Multipliziert man (15) mit $\partial x_i / \partial y_s$, so folgt wegen (5) für $k=1$

$$(18) \quad R_{pitq}^r E_{r|s} = E_{st|pq} - E_{sq|pt},$$

wo die uns bereits bekannte linke Seite den ersten (Riemannschen) Krümmungstensor der F_s darstellt.

Die Relation (18) und die §2 (12) für $k=2$

$$(19) \quad \begin{aligned} 3B_{pqrs} &= E_{pq|rs} + E_{pr|qs} + E_{ps|rq} \\ &= 3E_{pq|rs} + (E_{pr|qs} - E_{pq|rs}) + (E_{ps|rq} - E_{pq|rs}) \end{aligned}$$

gestatten die Berechnung von $E_{pq|rs}$ durch die Komponenten der zwei ersten Grundformen B_{pq} , B_{pqrs} .

Haben wir aus (18) und (19) die $E_{pq|rs}$ gewonnen, so liefert die Einsetzung dieser Grössen in (18), (19) entweder Identitäten allein oder auch Bedingungsgleichungen für die Grundformen. (Eine nähere Untersuchung dieser Verhältnisse zeigt aber, dass diese Relationen identisch erfüllt sind, also keine Bedingungsgleichungen liefern.) Da wir von den Relationen (15) durch Multiplikation mit $\partial x_i / \partial y_s$ zu (18) (bei Verwendung von (2)) gelangten, so ist (15) eine Folge von (2), sobald (18) erfüllt ist.*

Zur Berechnung der Γ_{pqt}^{rs} verwenden wir (16) und (7) für $k=2$. Die letztere Gleichung lautet

$$(20) \quad \frac{\partial E_{pq|rs}}{\partial y_t} = \Gamma_{pqt}^{ab} E_{ab|rs} + \Gamma_{rst}^{ab} E_{ab|pq}.$$

* Wir erinnern, dass

$$\frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_r}} \theta^{p_1 \cdots p_r} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^r x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_r}} \frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_r}} \theta^{p_1 \cdots p_r} = 0$$

dieselben Lösungen $\theta^{p_1 \cdots p_r}$ haben.

Schreiben wir

$$(21) \quad \frac{\partial E_{pq|rs}}{\partial y_t} = (pqrst),$$

so benutzen wir zur Berechnung das folgende Teil-System von (20):

$$(22) \quad \begin{aligned} & (pqrst) - (stpqr) + (qrstp) - (tpqrs) + (rstpq) \\ &= (\Gamma_{pqt}^{ab} + \Gamma_{tpq}^{ab})E_{ab|rs} + (\Gamma_{rst}^{ab} - \Gamma_{str}^{ab})E_{ab|pq} + (\Gamma_{qrp}^{ab} - \Gamma_{pqr}^{ab})E_{ab|st} \\ &+ (\Gamma_{stp}^{ab} - \Gamma_{tps}^{ab})E_{ab|qr} + (\Gamma_{rsq}^{ab} - \Gamma_{qrs}^{ab})E_{ab|tp}. \end{aligned}$$

Die Multiplikation von (16) mit

$$(23) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_a \partial y_b}$$

führt wegen (2) auf

$$(24) \quad E_{ab|rs}(\Gamma_{pq\delta t}^r - \Gamma_{pt\delta q}^r) = (\Gamma_{ptq}^{rs} - \Gamma_{pqt}^{rs})E_{rs|ab}.$$

Da uns aber die linken Seiten von (22) und (24) bereits bekannt sind, so können wir unter Verwendung der Symmetrieverhältnisse der Γ_{pqt} aus (22) und (24)

$$(25) \quad \Gamma_{pqt}^{ab} E_{ab|rs}$$

als bekannte Grösse in den B_{pq} , B_{pqrs} berechnen.

Aus (25) gewinnen wir endlich (bis auf die notwendige Unbestimmtheit, Nulltensor θ^{ab}) die Γ_{pqt}^{ab} durch die B_{pq} , B_{pqrs} allein ausgedrückt.

Da (24) aus (16) durch Multiplikation mit (23) unter Verwendung von (2) gewonnen wurde, so ist, wenn (24) gilt, (16) eine Folge von (2).

(Auch hier bleibt zu untersuchen, ob die zur Berechnung benutzten Relationen nach Einsetzung der gefundenen Werte identisch gelten, oder als Bedingungsgleichungen für die Grundformen anzusehen sind.)

Zur Berechnung der Γ_{pqt}^r verwenden wir wieder das System (5) für $k=1$:

$$(26) \quad E_{pk|qt} + \Gamma_{qtk}^r E_{r|p} = 0,$$

und erhalten daraus die Γ_{qtk}^r in den Grössen B_{pq} , B_{pqrs} ausgedrückt.

Das Resultat unseres zweiten Schritts lautet also:

Aus der Integrabilitätsbedingung der zweiten Gleichung des Systems der Frenet-Gleichungen und den Relationen (7) ($k=2$), (5) ($k=1$) und §2 (12) (für $k=2$) konnten wir $E_{ab|cd}$, die Massform des I_2 und die in der dritten Gleichung des Frenet-System auftretenden Γ durch die Grössen B_{pq} , B_{pqrs} allein berechnen.

Die bei der Rechnung benutzte Integrabilitätsbedingung ist dabei eine Folge von (2).

Wir beweisen jetzt das *Haupttheorem*:

Haben wir aus den Komponenten der h ersten Grundformen

$$(27) \quad B_{pq}, B_{pqrs}, \dots, B_{p_1 \dots p_{2h}}$$

die Masstensenoren der h ersten I_r Räume, $r=1, \dots, h$:

$$(28) \quad E_{p|q}, E_{pq|rs}, \dots, E_{p_1 \dots p_h | q_1 \dots q_h}$$

und die Koeffizienten der $(h+1)$ ersten Gleichungen des Frenet-Systems

$$(29) \quad \Gamma_{pq}^{r1}, \Gamma_{pqt}^{r1}, \Gamma_{pqt}^{r1r_2}, \dots, \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h-1}}, \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_h}$$

berechnet, so können wir aus der Integrabilitätsbedingung der $(h+1)$ ten Gleichung dieses Systems, ferner aus Relation (7) für $k=h+1$, (5) für $k=h$ und §2 (12) für $k=h+1$ sowohl den Masstensor des I_{h+1} : $E_{p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}}$, als auch die Koeffizienten

$$\Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{r_1 \dots r_h}, \quad \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{r_1 \dots r_{h+1}}$$

der $(h+2)$ ten Gleichung des Frenet-System berechnen und zwar ausgedrückt durch die Grössen (27) und $B_{p_1 \dots p_{2h+2}}$ allein.

Der Beweis verläuft ziemlich analog dem des zweiten Schrittes. Wir bilden zuerst

$$(30) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_{p_{h+2}}} \left(\frac{\partial}{\partial y_{p_{h+1}}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \right) = \frac{\partial}{\partial y_{p_{h+2}}} \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h-1}} \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_{h-1}}} \\ & + \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h-1}} \left(\Gamma_{r_1 \dots r_{h-1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-2}} \frac{\partial^{h-2} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_{h-2}}} \right. \\ & + \Gamma_{r_1 \dots r_{h-1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_{h-1}}} + \left. \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_{h-1}} \partial y_{p_{h+2}}} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y_{p_{h+2}}} \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_h} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_h}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_h} \left(\Gamma_{r_1 \dots r_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_h}} + \Gamma_{r_1 \dots r_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_h}} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_h} \partial y_{p_{h+2}}} \right) + \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{r_1 \dots r_h} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_h}} \\
& + \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{r_1 \dots r_{h+1}} \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_{h+1}}} + \frac{\partial^{h+2} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_{h+1}} \partial y_{p_{h+2}}},
\end{aligned}$$

und erhalten die Integrabilitätsbedingung als Folge von (2) gespalten in

$$(31) \quad (\Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h-1}} \Gamma_{r_1 \dots r_{h-1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-2}} - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{r_1 \dots r_{h-1}} \Gamma_{r_1 \dots r_{h-1} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h-2}}) \frac{\partial^{h-2} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_{h-2}}} = 0;$$

$$\begin{aligned}
(32) \quad & \left(\frac{\partial \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h-1}}}{\partial y_{p_{h+2}}} - \frac{\partial \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-1}}}{\partial y_{p_{h+1}}} + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h-1}} \Gamma_{r_1 \dots r_{h-1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \right. \\
& - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{r_1 \dots r_{h-1}} \Gamma_{r_1 \dots r_{h-1} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h-1}} + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_h} \Gamma_{r_1 \dots r_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \\
& \left. - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{r_1 \dots r_h} \Gamma_{r_1 \dots r_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \right) \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_{h-1}}} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(33) \quad & \left(\frac{\partial \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h}}{\partial y_{p_{h+2}}} - \frac{\partial \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h}}{\partial y_{p_{h+1}}} + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_h} \Gamma_{r_1 \dots r_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h} \right. \\
& - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{r_1 \dots r_h} \Gamma_{r_1 \dots r_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h} + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \delta_{p_{h+2}}^{s_h} - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-1}} \delta_{p_{h+1}}^{s_h} \\
& \left. + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h} - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h} \right) \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_h}} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(34) \quad & \left(\Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h} \delta_{p_{h+2}}^{s_{h+1}} - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h} \delta_{p_{h+1}}^{s_{h+1}} + \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h+1}} \right. \\
& \left. - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h+1}} \right) \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_{h+1}}} = 0;
\end{aligned}$$

$$(35) \quad \frac{\partial^{h+2} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+1}} \partial y_{p_{h+2}}} - \frac{\partial^{h+2} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+2}} \partial y_{p_{h+1}}} = 0.$$

Die Relation (35) ist eine Folge von (2) (vergl. (17) und (9')). Schreiben wir (31) bis (34) abkürzend

$$(31') \quad \frac{\partial^{h-2} x_i}{\partial y_{s_1} \dots \partial y_{s_{h-2}}} \theta_{p_1 \dots p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h-2}} = 0,$$

$$(32') \quad \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_{h-1}}} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_{h-1}} = 0,$$

$$(33') \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_h}} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_h} = 0,$$

$$(34') \quad \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_{h+1}}} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_{h+1}} = 0,$$

so erhält man die Gleichungen, die wir zur weiteren Rechnung verwenden durch entsprechende Multiplikation der obigen Relation mit

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{a_1} \cdots \partial y_{a_k}}, \quad k = h-2, \text{ resp. } h-1, \text{ resp. } h, \text{ resp. } h+1,$$

bei Verwendung von (2) in der Gestalt

$$(31'') \quad E_{a_1 \cdots a_{h-2} | s_1 \cdots s_{h-2}} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_{h-2}} = 0,$$

$$(32'') \quad E_{a_1 \cdots a_{h-1} | s_1 \cdots s_{h-1}} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_{h-1}} = 0,$$

$$(33'') \quad E_{a_1 \cdots a_h | s_1 \cdots s_h} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_h} = 0,$$

$$(34'') \quad E_{a_1 \cdots a_{h+1} | s_1 \cdots s_{h+1}} \theta_{p_1 \cdots p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_{h+1}} = 0.$$

Sind (31'') bis (34'') erfüllt, so sind die entsprechenden Integrabilitätsgleichungen (31) bis (34) eine Folge von (2).

Die Relationen (31'') und (32'') enthalten nur die bereits berechneten Grössen (28), (29) und stellen also Gleichungen für die Reihe (27) dar, die, wie wir zeigen werden, bereits erledigt sind. Die Relation (33'') wieder hat die Form

$$(35') \quad E_{a_1 \cdots a_h | s_1 \cdots s_h} (\Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_h} - \Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \cdots s_h}) = \text{bekannt in den Grössen der Reihe (27)}.$$

Nach Formel (5), für $k=h$ können wir statt (35) schreiben

$$(35'') \quad E_{a_1 \cdots a_h p_{h+1} | p_1 \cdots p_h p_{h+2}} - E_{a_1 \cdots a_h p_{h+2} | p_1 \cdots p_h p_{h+1}} = \text{bekannt in den Grössen der Reihe (27)}.$$

Gleichung (12) §2 für $k=h+1$ lautet

$$(36) \quad (2h+2)! B_{p_1 \cdots p_{2h+2}} = \sum E_{c_1 \cdots c_{h+1} | c_{h+2} \cdots c_{2h+2}},$$

wo in der Summe rechts die $c_1, \cdots, c_{2h+2}$ alle $(2h+2)!$ Permutationen von $p_1 \cdots p_{2h+2}$ durchlaufen.

Bei Benutzung der Symmetrie-Eigenschaften von $E_{c_1 \dots c_{h+1} | d_1 \dots d_{h+1}}$ kann man aus (35'') und (36) den Masstensor $E_{c_1 \dots c_{h+1} | d_1 \dots d_{h+1}}$ des I_{h+1} eindeutig, und zwar durch die Grössen (27) und $B_{p_1 \dots p_{2h+2}}$ allein ausgedrückt, berechnen.

Aus der eben verwendeten Formel (5) für $k=h$ berechnet man weiter (und zwar aus $E_{a_1 \dots a_h | b_1 \dots b_h}$ und $E_{a_1 \dots a_{h+1} | b_1 \dots b_{h+1}}$, d. h. also) aus den $B_{p_1 \dots p_{2k}}$, $k=1, \dots, h+1$, die

$$\Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h}$$

mit der ihnen zukommenden Unbestimmtheit. Um die

$$(37) \quad \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{r_1 \dots r_{h+1}}$$

zu berechnen, benutzen wir neben der Relation (34'') noch die Relation (7) für $k=h+1$:

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} E_{p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}} = \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} t}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}} \\ + \Gamma_{q_1 \dots q_{h+1} t}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | p_1 \dots p_{h+1}}.$$

Wir bezeichnen

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial y_t} E_{p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}} = (p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1} | t)$$

und bilden das aus (38) gebildete System mit bekannter linker Seite:

$$(p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1} | t) - (q_2 \dots q_{h+1} t | p_1 \dots p_{h+1} | q_1) \\ + (p_2 \dots p_{h+1} q_1 | q_2 \dots q_{h+1} t | p_1) - (q_3 \dots q_{h+1} t p_1 | p_2 \dots p_{h+1} q_1 | q_2) \\ + (p_3 \dots p_{h+1} q_1 q_2 | q_3 \dots q_{h+1} t p_1 | p_2) \\ \dots \dots \dots - (q_4 \dots q_{h+1} t p_1 p_2 | p_3 \dots p_{h+1} q_1 q_2 | q_3) \\ \dots \dots \dots + (p_{h+1} q_1 \dots q_h | q_{h+1} t p_1 \dots p_{h-1} | p_h) - (t p_1 \dots p_h | p_{h+1} q_1 \dots q_h | q_{h+1}) \\ + (q_1 q_2 \dots q_{h+1} | t p_1 \dots p_h | p_{h+1}) \\ = \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} t}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}} + \Gamma_{q_1 \dots q_{h+1} t}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | p_1 \dots p_{h+1}} \\ - \Gamma_{q_2 \dots q_{h+1} t q_1}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | p_1 \dots p_{h+1}} - \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} q_1}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | q_2 \dots q_{h+1} t} \\ (40) \quad + \Gamma_{p_2 \dots p_{h+1} q_1 p_1}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | q_2 \dots q_{h+1} t} + \Gamma_{q_2 \dots q_{h+1} t p_1}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | p_2 \dots p_{h+1} q_1} \\ \dots \dots \dots - \Gamma_{t p_1 \dots p_h q_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | p_{h+1} q_1 \dots q_h} - \Gamma_{p_{h+1} q_1 \dots q_h q_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | t p_1 \dots p_h} \\ + \Gamma_{q_1 \dots q_{h+1} p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | t p_1 \dots p_h} + \Gamma_{t p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{r_1 \dots r_{h+1}} E_{r_1 \dots r_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}}.$$

Aus (40) und (34''), welche Gleichung geschrieben werden kann

$$(\Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h+1}} - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_{h+1}}) E_{s_1 \dots s_{h+1} | a_1 \dots a_{h+1}} = \text{bekannt},$$

berechnen wir unter Verwendung der Symmetrie Eigenschaften der Γ

$$(41) \quad \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h+1}} E_{s_1 \dots s_{h+1} | a_1 \dots a_{h+1}} = \text{bekannt}.$$

Daraus wieder erhält man (bis auf die ihnen zukommende Unbestimmtheit) die Grössen (37) ausgedrückt durch die Komponenten der Reihe (27) und $B_{p_1 \dots p_{2h+2}}$. Um schliesslich zu zeigen, dass die Integrabilitätsbedingungen (31'') und (32'') zu keinen neuen Bedingungsgleichungen zwischen den Formkomponenten führen, bilden wir

$$(42) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_s} \left[\frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \right) \right] \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_s} \left[\frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \right) \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \right] \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \right) \frac{\partial}{\partial y_s} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \right). \end{aligned}$$

Der zweite Term rechts ist aber

$$\begin{aligned} &= - \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \frac{\partial}{\partial y_s} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \right) \right] \\ & \quad + \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\frac{\partial}{\partial y_s} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(43) \quad \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial y_s} \left[\frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\frac{\partial}{\partial y_s} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}} \right) \right] \right\} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \\ &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial y_s} \left[\frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\frac{\partial}{\partial y_s} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} \right) \right] \right\} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_h}}. \end{aligned}$$

(Denn die Differenz der beiden Seiten von (43) ist nach (42)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_s} \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_k}} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\frac{\partial}{\partial y_s} \left(\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_q \cdots \partial y_{q_k}} \right) \right], \end{aligned}$$

welcher Ausdruck für $h \neq k$ verschwindet, aber auch für $h = k$, die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Masstensoren vorausgesetzt.) Die linke Seite der Gleichung (43) stimmt mit der linken Seite (31'') für $k = h - 2$ und mit der linken Seite (32'') für $k = h - 1$ überein. Wir haben somit das Resultat:

Die Gleichung (31''), die erste aus der Integrabilitätsbedingung der $(h+1)$ ten Gleichung des Frenet-Systems hergeleitete, ist identisch mit der letzten Gleichung, die aus der Integrabilitätsbedingung der $(h-1)$ ten Gleichung des Frenet-Systems entspringt. Und ebenso ist (32''), die zweite aus der Integrabilitätsbedingung der $(h+1)$ ten Gleichung des Frenet-Systems hergeleitete, mit der vorletzten Gleichung identisch, die aus der Integrabilitätsbedingung der h ten Gleichung des Frenet-Systems folgt. Als (mögliche) Bedingungsgleichungen für die Formen verbleiben somit die Relationen (5) und (7), weiter (33'') und (34'') und die Relationen (36).

Da die integrierte F_s aber *reell* sein soll, eine stillschweigende Annahme, die in unseren Überlegungen wesentlich verwendet wurde, so müssen die E -Tensoren *positiv halbdefinit* sein, damit die Nebenbedingungen (2) durch ein *reelles* Basis-Bein erfüllbar sind.

Das gibt für die Grund-Tensoren aber Bedingungen, die anscheinend in eine einfache Gestalt nicht gebracht werden können.

Dagegen ist es nicht schwer, für die *Masstensoren* $E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h}$ als vollständiges "Invarianten"-System die notwendigen und hinreichenden Bedingungsrelationen anzugeben:

Ausser der oben erwähnten Eigenschaft *positiv halbdefinit* zu sein, müssen sie die Relationen (5), (7), (33''), (34'') erfüllen.

Im folgenden Paragraphen leiten wir einige geometrische Tatsachen ab, die aus dem Haupttheorem sofort folgen.

5. EINIGE GEOMETRISCHE FOLGERUNGEN

I. DIE EINBETTUNGSZAHL DER F_s

Wir definieren: Lässt sich eine F_s in eine ϵ -dimensionale Hyperebene E_ϵ , aber nicht in eine $(\epsilon-1)$ -dimensionale $E_{\epsilon-1}$ einbetten, so nennen wir ϵ die *Einbettungszahl* der F_s .

Es gilt dann der Satz:

Bezeichnet l_σ die Dimension des I_σ , und ist I_m der letzte Normalvektorraum der F_ϵ , so ist

$$(1) \quad \epsilon = \sum_{\sigma=1}^m l_\sigma.$$

D. h. die Einbettungszahl der F_ϵ ist gleich der Dimension des grössten Schmiege-Vektorraums.

Wir gehen, um den Satz zu beweisen, auf das Frenet-System (§3 (11)) und die Nebenbedingungen (§4 (2)) für dasselbe zurück.

Für die gegebene F_ϵ sind die dort auftretenden E und Γ -Grössen so gegeben, dass sowohl die Integrabilitätsbedingungen des Frenet-Systems als auch das aus den Nebenbedingungen abgeleitete System eine Folge dieser Nebenbedingungen sind. (Die Relationen (5), (7), (33''), (34'') und (36) des §4 sind erfüllt.)

Wenn wir daher die Anfangswerte für die Reihe

$$(2) \quad x_i, \frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \dots, \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_m}}$$

so wählen können, dass die Nebenbedingungen (2) erfüllt sind, erhalten wir eine $\tilde{F}_\epsilon$ mit demselben Formensystem wie die F_ϵ .

Das können wir aber in einem R_ϵ (d. h. einem Raum der Dimension des letzten Schmiege-Vektorraums der F_ϵ) und in keinem R_ν , $\nu < \epsilon$. Wählen wir als den R_ϵ jene durch

$$(3) \quad x_{\epsilon+1} = 0, \quad x_{\epsilon+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

gegebene ϵ -dimensionale Hyperebene des R_n , so liegt die integrierte $\tilde{F}_\epsilon$ ganz in diesem R_ϵ , und da sie der gegebene F_ϵ kongruent ist, liegt auch diese ganz in einer ϵ -dimensionalen Hyperebene des R_n . Wie die $\tilde{F}_\epsilon$ selbst kann sie (schon vermöge der Nebenbedingungen (2) §4) in keiner Hyperebene niedrigerer Dimension liegen.

II. ÜBER DIE KRÜMMUNGSTENSOREN DER F_ϵ

Der Tensor

$$(4) \quad E_{p_1 \dots p_h p_{h+1} | q_1 \dots q_h q_{h+1}} - E_{p_1 \dots p_h q_{h+1} | q_1 \dots q_h p_{h+1}}$$

ist (§4 (35')) ausdrückbar durch die Komponenten der ersten h Grundformen der F_ϵ

$$(5) \quad B_{p_1 \dots p_{2k}} \quad (k = 1, \dots, h)$$

resp. deren Ableitungen. Wir nennen ihn den h ten Krümmungstensor der F_ϵ .

(Der erste Krümmungstensor ist der Riemannsche Krümmungstensor der F_e .)

Es gilt der Satz:

Verschwindet für eine F_e der h te Krümmungstensor, so gibt es immer eine $\tilde{F}_e$, deren vollständiges Formensystem aus den h ersten Grundformen der F_e besteht.

Wenn wir im Frenet-System (§3 (11)) und im System der Nebenbedingungen (§4 (2)) alle

$$(6) \quad \frac{\partial^t x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_t}}, \quad E_{r_1 \cdots r_t | a_1 \cdots a_t}$$

für $t > h$ und ausserdem $\Gamma_{p_1 \cdots p_{h+1} p_{h+2}}^{r_1 \cdots r_h}$ Null setzen, so erhalten wir ein analog gebautes System totaler Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen.

Können wir zeigen, dass auch für dieses die Integrabilitätsbedingungen, sowie das abgeleitete System der Nebenbedingungen *eine Folge der Nebenbedingungen sind*, so ist der Satz offenbar bewiesen.

Für das abgeleitete System der Nebenbedingungen gilt das, da die Relationen ((5) und (7), §4) wegen $\Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}^{r_1 \cdots r_h} = 0$ erfüllt sind.

Was die Integrabilitätsbedingungen betrifft, so könnte sie nur die für die $(h+1)$ te Gleichung des neuen Frenet-Systems nicht erfüllt sein, da nur diese Gleichung von der entsprechenden des ursprünglichen Systems abweicht.

Die fragliche Integrabilitätsbedingung aber ist aus der ursprünglichen $(h+1)$ ten Gleichung, wie wir sie §4 (31), (32), (33) und (34) anschieben, sofort ableitbar.

Die Gleichungen (31) und (32) bleiben unverändert, (34) fällt weg, und nur die (33) entsprechenden Relationen unterscheiden sich um die Differenz

$$(7) \quad (\Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_h} - \Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \cdots s_h}) \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_h}}$$

(wo die Γ natürlich die der gegebenen F_e sind). Aber (7) verschwindet, wenn

$$(8) \quad (\Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \cdots s_h} - \Gamma_{p_1 \cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \cdots s_h}) E_{s_1 \cdots s_h | a_1 \cdots a_h} = 0$$

ist. Das aber trifft gerade zu wegen §4 (5) und der Voraussetzung unseres Satzes.

Damit ist der Beweis geliefert.

Bemerkung. Für $h=1$ hat die $\tilde{F}_e$ nur die erste Grundform. Sie hat also nur einen invarianten Vektorraum, den I_1 . Ihre Einbettungszahl ist also gleich der Dimensionszahl des I_1 , d. h. gleich e .

Die $\tilde{F}_e$, die ganz in einer E_e liegt, ist somit diese E_e selbst. Damit ist die Abwickelbarkeit der F_e in eine E_e nachgewiesen, sobald der erste Krümmungstensor verschwindet.

III. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN F_r DER F_e

Ein Hauptergebnis des vorhergehenden Paragraphen bringen wir in Erinnerung:

Die Masstensenoren $E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k}$ wie die

$$\Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_{k-1}}, \quad \Gamma_{p_1 \dots p_k p_{k+1}}^{r_1 \dots r_k} \quad \text{für } k = 1, \dots, h$$

sind durch die h ersten Grundformen $B_{p_1 \dots p_{2k}}, k = 1, \dots, h$, bestimmt.

Wir betrachten eine in der F_e eingebettete F_r ,

$$(9) \quad y_p = y_p(z_1, \dots, z_r) \quad (p = 1, \dots, l)$$

die wir als im euklidischen R_n liegend in der selben Art wie die F_e behandeln.

Der Tangential-Vektorraum der F_r wird durch die r Vektoren

$$(10) \quad \frac{\partial x_i}{\partial z_a} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \quad (a = 1, \dots, r)$$

aufgespannt und liegt ganz im I_1 der F_e .

Jeder Schmiege-Vektorraum der F_r liegt ebenso im entsprechenden Schmiege-Vektorraum der F_e .

Um die Projektionen der die Schmiege-Vektorräume aufspannenden Raumvektoren der F_r von den entsprechenden der F_e zu unterscheiden bezeichne

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial z_{a_1} \dots \partial z_{a_h}}$$

die Projektion von $\partial^h x_i / \partial z_{a_1} \dots \partial z_{a_h}$ in den I_h der F_r . Die Massvektoren der I_h der F_r bezeichnen wir $F_{a_1 \dots a_h | b_1 \dots b_h}$ und die Grundtensenoren $C_{a_1 \dots a_{2h}}$.

Für den Masstensor $F_{a|b}$ des I_1 der F_r erhalten wir aus (10)

$$(11) \quad F_{a|b} = E_{p|q} \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \frac{\partial y_q}{\partial z_b} \quad (a, b = 1, \dots, r).$$

Wir gehen nun über zum zweiten Schmiege-Vektorraum. Durch Differentiation von (10) nach z_b erhalten wir aus (10):

$$(12) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial z_a \partial z_b} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \frac{\partial y_q}{\partial z_b} + \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial^2 y_p}{\partial z_a \partial z_b}.$$

Bezeichnen wir die den Γ der F_e entsprechenden Grössen der F_r mit P , so geben die zweiten Relationen im System der Frenet-Gleichungen aus (12)

$$(13) \quad P_{ab}^c \frac{\partial x_i}{\partial z_c} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial z_a \partial z_b} = \left(\Gamma_{pq}^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \right) \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \frac{\partial y_q}{\partial z_b} + \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial^2 y_p}{\partial z_a \partial z_b}.$$

Daraus folgt

$$(14) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial z_a \partial z_b} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \frac{\partial y_q}{\partial z_b} + \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial z_a \partial z_b} + \Gamma_{pq}^r \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \frac{\partial y_q}{\partial z_b} - P_{ab}^c \frac{\partial y_r}{\partial z_c} \right],$$

wo der Faktor von $\partial x_i / \partial y_r$ die "verallgemeinerte" invariante Ableitung

$$(15) \quad \frac{D^2 y_r}{Dz_b Dz_a} = \frac{\partial^2 y_r}{\partial z_a \partial z_b} + \Gamma_{pq}^r \frac{\partial y_p}{\partial z_a} \frac{\partial y_q}{\partial z_b} - P_{ab}^c \frac{\partial y_r}{\partial z_c}$$

von $\partial y_r / \partial z_a$ nach z_b ist. (Ist $r=l$, so verschwindet die invariante Ableitung und (15) stellt das Transformationsgesetz der Christoffelklammer dar.)

Wir haben in (14) die Projektions-Vektoren (in den I_2 der F_r):

$$(16) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial z_a \partial z_b}$$

linear dargestellt durch die Basis des I_{12} der F_e mit Koeffizienten, die von

$$(17) \quad B_{pq} \text{ und Ableitungen der } y \text{ nach den } z$$

allein abhängen.

In der Tat ist P_{ab}^c ebenfalls durch diese Grössen ausdrückbar, da P_{ab}^c durch $F_{a|b}$ bestimmt ist und (11) gilt. *Es besteht allgemein die Darstellung*

$$(18) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial z_{a_1} \cdots \partial z_{a_k}} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial y_{p_1}}{\partial z_{a_1}} \cdots \frac{\partial y_{p_k}}{\partial z_{a_k}} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_m}} T_{a_1 \cdots a_k}^{p_1 \cdots p_m},$$

wo die Tensoren $T_{a_1 \cdots a_k}^{p_1 \cdots p_m}$, $m=1, 2, \dots, k-1$, durch die Reihe

$$(18') \quad B_{pq}, \dots, B_{p_1 \cdots p_{2k-2}},$$

und Ableitungen der y nach den z allein bestimmt sind.

Die Behauptung ist richtig für $k=1$ und 2. Wenn wir zeigen, dass sie für $k+1$ gilt, wenn sie für $1, 2, \dots, k$ besteht, ist sie allgemein bewiesen.

Aus (18) erhalten wir für die Masstensoren die Beziehung

$$(19) \quad F_{a_1 \dots a_k | b_1 \dots b_k} = E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k} \frac{\partial y_{p_1}}{\partial z_{a_1}} \dots \frac{\partial y_{p_k}}{\partial z_{a_k}} \frac{\partial y_{q_1}}{\partial z_{b_1}} \dots \frac{\partial y_{q_k}}{\partial z_{b_k}} \\ + \sum_{m=1}^{k-1} E_{p_1 \dots p_m | q_1 \dots q_m} T_{a_1 \dots a_k}^{p_1 \dots p_m} T_{b_1 \dots b_k}^{q_1 \dots q_m}.$$

Also ist auch $F_{a_1 \dots a_k | b_1 \dots b_k}$ durch die Grössen (18') und $B_{p_1 \dots p_{2k}}$ ausgedrückt.

Durch Differentiation von (18) nach z_{a+1} erhalten wir unter Verwendung der Frenet-Formeln §3 (11):

$$(20) \quad P_{a_1 \dots a_k a_{k+1}}^{c_1 \dots c_{k-1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial z_{c_1} \dots \partial z_{c_{k-1}}} + P_{a_1 \dots a_k a_{k+1}}^{c_1 \dots c_k} \frac{\partial^k x_i}{\partial z_{c_1} \dots \partial z_{c_k}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial z_{a_1} \dots \partial z_{a_k} \partial z_{a_{k+1}}} \\ = \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}} \frac{\partial y_{p_1}}{\partial z_{a_1}} \dots \frac{\partial y_{p_k}}{\partial z_{a_k}} \frac{\partial y_{p_{k+1}}}{\partial z_{a_{k+1}}} \\ + \sum_{m=1}^k \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_m}} U_{a_1 \dots a_{k+1}}^{p_1 \dots p_m},$$

wo die U -Tensoren jetzt neben den Grössen (18') noch $B_{p_1 \dots p_{2k}}$ enthalten. Aber die P -Grössen der linken Seite von (20) sind durch $C_{a_1 \dots a_{2t}}$, $t=1, \dots, k$, ausdrückbar, also (19) durch die Grössen (18') und $B_{p_1 \dots p_{2k}}$. Da für $1, 2, \dots, k$ die Behauptung voraussetzungsgemäss gilt, so folgt damit aus (20) ihre Richtigkeit für $k+1$.

Eine Folge des Tatbestandes (18) ist der Satz:

Haben zwei F_ die Grundformen bis zur $(2k)$ ten Stufe gleich:*

$$B_{p_1 p_2}, \dots, B_{p_1 \dots p_{2k}},$$

so haben entsprechend zugeordnete Untermannigfaltigkeiten (d. h. durch gleiche Parameterdarstellung (9) zugeordnete) ebenfalls die ersten k Grundformen gleich.

Aber auch die Umkehrung gilt:

Wenn zwei F_ so zugeordnet werden können, dass entsprechende F_* (r fixiert) gleiche Grundformen bis zur $(2k)$ ten Stufe besitzen, so haben die beiden F_* ebenfalls identische Grundformen bis zur $(2k)$ ten Stufe.*

Beweis der Umkehrung. Multipliziert man (11) mit $dz_a dz_b$, so folgt, dass $E_{p_1 q} dy_p dy_q$ für beide F_* gleich ist.

Aber mit der Willkür der F_r ist auch

$$dy_p = \frac{\partial y_p}{\partial z_a} dz_a$$

willkürlich. Also ist

$$E_{p|q} dy_p dy_q$$

für beliebige dy_p für beide F_* gleich, woraus aber die Gleichheit der ersten Grundformen folgt.

Wir denken uns nun die Gleichheit der $(h-1)$ ersten Grundformen bewiesen, dann folgt aus (19) für $k=h$ und der Voraussetzung des Satzes, dass

$$E_{p_1 \dots p_h | q_1 \dots q_h} dy_{p_1} \dots dy_{p_h} dy_{q_1} \dots dy_{q_h}$$

für beliebige dy_p für beide F_* gleich ist. Also gilt die Behauptung auch für die h te Grundform, und da sie für $h=1$ gilt, ist die Umkehrung bewiesen.

Besonders interessant wird der Satz für die $F_1(r=1)$, d. h. für Kurven der F_* . Der Zusammenhang der Formen der Kurve mit ihren Krümmungen wird durch

$$(21) \quad \frac{d^k x_i}{ds^k} \frac{d^k x_i}{ds^k} = \frac{1}{(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{k-1})^2}, \quad ds^2 = B_{11} dy^2,$$

gegeben. Also sind durch die ersten k "Grundformen" die Bogenlänge und die $(\rho-1)$ ersten Krümmungen gegeben und umgekehrt.

Wir verweisen für den Satz, der den Spezialfall des soeben bewiesenen für $r=1$ darstellt, auf das *Lehrbuch* (XI §9, p. 226).

BEMERKUNGEN ZU III

(A) Wir können von den in die Relation (18) eintretenden Tensoren $T_{a_1 \dots a_k}^{p_1 \dots p_m}$ nachweisen, dass sie nur Ableitungen der y nach z bis zur k ten Ordnung inklusive enthalten.

Verfolgt man nämlich die Bildung der Γ -Größen, so sieht man, dass

$$(22) \quad \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_{h+1}}$$

allein aus $E_{p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}}$, deren ersten Ableitungen und aus $\Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h}$ (unabgeleitet) gebildet ist. Daraus folgt, dass (22) nur aus den $E_{p_1 | q_1}, \dots, E_{p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}}$ und deren ersten Ableitungen aufgebaut ist.

Der Tensor

$$\Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h}$$

wieder hängt nur ab von den nichtdifferenzierten $E_{p_1 \dots p_h | q_1 \dots q_h}$ und $E_{p_1 \dots p_{h+1} | q_1 \dots q_{h+1}}$.

Diese Tatsachen aber reichen hin, um die angegebene Eigenschaft der Tensoren T in (18) nachzuweisen.

(B) Aus der Formel (19) gewinnt man sofort Relationen zwischen den Krümmungen der F_r und der F_e und den "Relativkrümmungen" der F_r in bezug auf die F_e .

(Man hat dazu nur die Differenz $F_{a_1 \dots a_{k-1} a_k | b_1 \dots b_{k-1} b_k} - F_{a_1 \dots a_{k-1} b_k | b_1 \dots b_{k-1} a_k}$ aus (19) zu bilden.)

6. DER $I_{12} \dots h$ -SCHMIEG-VEKTORRAUM, SEINE METRIK UND PARALLELVERSCHIEBUNG*

Ist

$$(1) \quad \lambda_i = \sum_{k=1}^h \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} l^{p_1 \dots p_k}$$

ein Vektor des $I_{12} \dots h$, so nennen wir die in (1) auftretenden symmetrischen Flächentensoren

$$(2) \quad l^{p_1 \dots p_k} \quad (k = 1, \dots, h)$$

die *kontravariante Darstellung* des Vektors λ_i .

Die kontravariante Darstellung ist bis auf die Nulltensoren $\theta^{p_1 \dots p_k}$ gegeben, d. h. bis auf die Lösungen von

$$(3) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \theta^{p_1 \dots p_k} = 0 \quad (k = 2, \dots, h),$$

resp.

$$(3') \quad E_{q_1 \dots q_k | p_1 \dots p_k} \theta^{p_1 \dots p_k} = 0 \quad (k = 2, \dots, h).$$

Als *kovariante Darstellung* des Raumvektors λ_i bezeichnen wir die Gesamtheit der symmetrischen Flächentensoren

$$(4) \quad l_{p_1 \dots p_k} = \lambda_i \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}}.$$

Während die kontravarianten Darstellungstensoren (2) keiner Einschränkung unterliegen, gilt für die kovarianten (notwendig und hinreichend):

* Dazu siehe: *Beitrag zur Differentialgeometrie* u. s. w., Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, 1931. *Zum Tensorkalkül in Vektorräumen Riemannscher Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1933.

$$(5) \quad l_{p_1 \dots p_k} \theta^{p_1 \dots p_k} = 0,$$

für jeden Nulltensor $\theta^{p_1 \dots p_k}$.

Das innere Produkt eines kovarianten Darstellungstensors k ter Stufe mit einem Nulltensor k ter Stufe verschwindet.

Zwischen der kontra- und kovarianten Darstellung (2) und (4) besteht die Beziehung

$$(6) \quad l_{p_1 \dots p_k} = E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k} l^{q_1 \dots q_k},$$

die man erhält, wenn man in (4) für λ_i den Ausdruck (1) substituiert. Ferner folgt aus (1)

$$(7) \quad \lambda_i \lambda_i = \sum_{k=1}^h E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k} l^{p_1 \dots p_k} l^{q_1 \dots q_k}.$$

Führt man den Tensor

$$(8) \quad E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_r} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \frac{\partial^r x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_r}}$$

ein, so können wir (6) und (7) auch schreiben

$$(6') \quad l_{p_1 \dots p_k} = \sum_{r=1}^h E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_r} l^{q_1 \dots q_r}$$

resp.

$$(7') \quad \lambda_i \lambda_i = \sum_{r,s=1}^h E_{p_1 \dots p_r | q_1 \dots q_s} l^{p_1 \dots p_r} l^{q_1 \dots q_s}.$$

Den Tensor (8) (für $r, k=1, \dots, h$) nennen wir den *metrischen Tensor* des $I_{12 \dots h}$.

Wir nennen nun den Raumvektor λ_i (1) des $I_{12 \dots h}$, der längs eines Kurvenstückes C der F_e definiert ist, $I_{12 \dots h}$ -parallel, wenn sein Raumdifferential $d\lambda_i$ stets normal ist zum $I_{12 \dots h}$.

Aus der Definition folgt ohne weiteres, dass die $I_{12 \dots h}$ -Parallelverschiebung (von Vektoren des $I_{12 \dots h}$) die Längen und Winkel unverändert lässt.

Sind nämlich λ_i und μ_i jetzt $I_{12 \dots h}$ -parallelverschobene Vektoren des $I_{12 \dots h}$, so ist

$$d(\lambda_i \mu_i) = d\lambda_i \mu_i + \lambda_i d\mu_i = 0,$$

da λ_i, μ_i im $I_{12 \dots h}$ und $d\lambda_i, d\mu_i$ normal zum $I_{12 \dots h}$ liegen.

Ist λ_i längs C ein $I_{12 \dots h}$ -parallelverschobener Vektor, so folgt aus (4) und der Definition der $I_{12 \dots h}$ -Parallelverschiebung

$$(9) \quad dl_{p_1 \dots p_k} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \right) dy_i.$$

Unter Verwendung der Frenet-Gleichungen §3 (11) schreiben wir (9)

$$(9') \quad dl_{p_1 \dots p_k} = \lambda_i \left(\Gamma_{p_1 \dots p_k i}^{r_1 \dots r_{k-1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_{k-1}}} + \Gamma_{p_1 \dots p_k i}^{r_1 \dots r_k} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k} \partial y_i} \right) dy_i,$$

also wegen (4)

$$(10) \quad dl_{p_1 \dots p_k} = (\Gamma_{p_1 \dots p_k i}^{r_1 \dots r_{k-1}} l_{r_1 \dots r_{k-1}} + \Gamma_{p_1 \dots p_k i}^{r_1 \dots r_k} l_{r_1 \dots r_k} + l_{p_1 \dots p_k i}) dy_i \quad (k = 1, \dots, h)$$

wo

$$(10') \quad l_{p_1 \dots p_k i} = 0$$

ist (4).

Das System (10), (10') beschreibt die $I_{12 \dots h}$ -Parallelverschiebung durch die kovarianten (Flächen)-Darstellungstensoren des Raumvektors λ_i des $I_{12 \dots h}$.*

Bezeichnet D (besser $D_{12 \dots h}$) das absolute $I_{12 \dots h}$ -Differential

$$(11) \quad D l_{p_1 \dots p_k} = dl_{p_1 \dots p_k} - (\Gamma_{p_1 \dots p_k i}^{r_1 \dots r_{k-1}} l_{r_1 \dots r_{k-1}} + \Gamma_{p_1 \dots p_k i}^{r_1 \dots r_k} l_{r_1 \dots r_k} + l_{p_1 \dots p_k i}) dy_i,$$

so folgt durch einfache Rechnung für den metrischen Tensor (§4, (5) und (7))

$$(12) \quad DE_{p_1 \dots p_r | q_1 \dots q_s} = 0 \quad (r, s = 1, \dots, h).$$

Wir hätten (12) auch aus der Tatsache ableiten können, dass die $I_{12 \dots h}$ -Parallelverschiebung Längen und Winkel von Raumvektoren invariant lässt. Das System Differentialgleichungen für die kovariante $I_{12 \dots h}$ -Parallelverschiebung (10) ist völlig gleichgebaut jenem Teilsystem der Frenet-Gleichungen §3 (11), das man durch Streichung der ersten sowie der $(h+2)$ ten, $(h+3)$ ten, $\dots$ bis letzten Gleichungen erhält, wenn man ausserdem in der $(h+1)$ ten Gleichung noch (10') entsprechend

* Ist (10) erfüllt, so folgt

$$d\lambda_i \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, h)$$

also $d\lambda_i$ normal zum $T_{12 \dots h}$.

$$(13) \quad \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+1}}}$$

weglässt.

Die Nebenbedingungen für die Lösungen von (10) sind aber die Relationen (5).

Wir stellen nun die Frage nach der vollständigen Integrabilität der $I_{12 \dots h}$ -Parallelverschiebung, also nach der des Systems (10) mit den Nebenbedingungen (5).

Was die Integrabilitätsbedingung der k ten Gleichung (10) betrifft, wenn $k=1, 2, \dots, h-1$, so ist ihre Form

$$(14) \quad \sum l_{p_1 \dots p_r} A^{p_1 \dots p_r} = 0,$$

wenn die entsprechende der $(k+1)$ ten Gleichung des Frenet-Systems

$$(15) \quad \sum \frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_r}} A^{p_1 \dots p_r} = 0$$

lautet. Da (15) für die gegebene F_s natürlich erfüllt ist und mit dem System

$$(16) \quad \frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_r}} A^{p_1 \dots p_r} = 0$$

äquivalent ist, so bedeutet das, dass die Koeffizienten $A^{p_1 \dots p_r}$ Nulltensoren sind. *Damit ist (14) als Folge der Nebenbedingungen (5) erfüllt.*

Die Integrabilitätsbedingung der h ten Gleichung des Systems (10) dagegen ist nur dann eine Folge der Nebenbedingungen (5), wenn (§4 (33')):

$$(17) \quad (\Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h} - \Gamma_{p_1 \dots p_h p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h}) E_{s_1 \dots s_h | r_1 \dots r_h} = 0$$

ist, d. h. wenn (§4 (5), §5) der h te Krümmungstensor verschwindet. Denn auch die Integrabilitätsbedingungen der h ten Gleichung (10) resp. der $(h+1)$ ten Gleichung des Frenet-Systems, die wir ebenfalls in der Form (14) resp. (15) schreiben können, haben dieselben Koeffizienten A mit Ausnahme des $A^{s_1 \dots s_h}$ (soweit die $l_{p_1 \dots p_r}$ auftreten).

Diese beiden A aber unterscheiden sich §4 (33) gerade um die Differenz

$$(18) \quad \Gamma_{p_1 \dots p_{h+1} p_{h+2}}^{s_1 \dots s_h} - \Gamma_{p_1 \dots p_{h+2} p_{h+1}}^{s_1 \dots s_h}.$$

Da aber der entsprechende Koeffizient A in der aus dem Frenet-System abgeleiteten Integrabilitätsbedingung offenbar ein Nulltensor ist, so kann der aus (10) hergeleitete nur dann einer sein, wenn (18) einer ist.

Wir haben somit:

Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (10) sind dann und nur dann eine Folge der Nebenbedingungen (5), wenn der h te Krümmungstensor der F_* verschwindet.

Sei jetzt

$$(19) \quad M = l_{p_1 \dots p_k} \theta^{p_1 \dots p_k} = 0,$$

$\theta^{p_1 \dots p_k}$ Nulltensor, eine Nebenbedingung des Systems (10). Wir bilden die "abgeleitete" Gleichung

$$\begin{aligned} dM &= (\Gamma_{p_1 \dots p_k t}^{r_1 \dots r_{k-1}} l_{r_1 \dots r_{k-1}} + \Gamma_{p_1 \dots p_k t}^{r_1 \dots r_k} l_{r_1 \dots r_k} + l_{p_1 \dots p_k t}) \theta^{p_1 \dots p_k} dy_t \\ (20) \quad &+ l_{p_1 \dots p_k} d\theta^{p_1 \dots p_k} \\ &= \Gamma_{p_1 \dots p_k t}^{r_1 \dots r_{k-1}} \theta^{p_1 \dots p_k} l_{r_1 \dots r_{k-1}} dy_t \\ &+ (d\theta^{r_1 \dots r_k} + \Gamma_{p_1 \dots p_k t}^{r_1 \dots r_k} \theta^{p_1 \dots p_k} dy_t) l_{r_1 \dots r_k} + l_{p_1 \dots p_k t} \theta^{p_1 \dots p_k} dy_t = 0, \end{aligned}$$

die aber (§3 (19), (20) und (21))

$$(21) \quad dM = \tilde{\theta}^{r_1 \dots r_{k-1}} l_{r_1 \dots r_{k-1}} + \tilde{\theta}^{r_1 \dots r_k} l_{r_1 \dots r_k} + \tilde{\theta}^{p_1 \dots p_k t} l_{p_1 \dots p_k t}$$

geschrieben werden kann. D. h.: das abgeleitete System der Nebenbedingungen (5) selbst ist eine Folge von (5). Somit gilt der Satz (nur für den euklidischen R_n):

Notwendig und hinreichend für die vollständige Integrabilität der $I_{12 \dots k}$ -Parallelverschiebung ist das Verschwinden des h ten Krümmungstensors der F_ .*

Erste Bemerkung. Ist der $I_{12 \dots m}$ der grösste Schmiege-Vektorraum, so ist die $I_{12 \dots m}$ -Parallelverschiebung total integrabel.

Dieser Satz ist eine triviale Folge des vorhergehenden. Wir können ihn aber ohne Mühe direkt ableiten. Die Einbettungszahl ϵ der F_* fällt ja mit der Dimensionszahl des $I_{12 \dots m}$ zusammen, d. h. die F_* liegt ganz in einem E_* so, dass jeder Raumvektor λ_i des E_* , der in einem Punkt der F_* definiert ist, durch (seine) Flächenkomponenten (4) beschreibbar ist.

Weiter ist die $I_{12 \dots m}$ -Parallelverschiebung hier identisch mit der Parallelverschiebung der E_* , also vollständig integrabel. (Da es keinen Normalvektorraum zum $I_{12 \dots m}$ in der E_* gibt, ist $d\lambda_i = 0$ die Gleichung der $I_{12 \dots m}$ -Parallelverschiebung.)

Zweite Bemerkung. Die $I_{12 \dots k}$ -Parallelverschiebung gibt Anlass zur Definition der " $I_{12 \dots k}$ -Geodätischen" als jenen Kurven, die entstehen, wenn ein Vektor λ_i des $I_{12 \dots k}$ stets in der Richtung $I_{12 \dots k}$ -parallel verschoben wird, die durch seine Projektion in den Tangentialraum I_1 gegeben ist.

7. DIE F_e IM R_n KONSTANTER KRÜMMUNG

Da wir jetzt nicht mehr den Vorteil haben, kartesische Koordinaten verwenden zu können, müssen wir für die folgende Betrachtung das *absolute Raumdifferential* von Vektoren resp. Tensoren des R_n verwenden statt des gewöhnlichen Differential wie bisher.

Ist also λ^i ein (kontravarianter) Raumvektor, so bezeichne $\vartheta\lambda^i$

$$(1) \quad \vartheta\lambda^i = d\lambda^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \lambda^j dx_k \quad (i, j, k = 1, \dots, n)$$

das absolute Differential dieses Vektors.

Für den Masstensor g_{ik} des R_n gilt $\vartheta g_{ik} = 0$.

Bezeichnung. Für Raum-Indizes seien die Buchstaben $a, b, \dots, k$ verwendet, für Flächen-Indizes die übrigen: $l, m, n, \dots$. (Also laufen a, b bis k von 1 bis n , und l, m bis z von 1 bis l .) Wenn wir von *absoluter Ableitung* sprechen, so denken wir vorerst nur an die Transformationen der Raumkoordinaten. Wir denken uns also in der in Parameterform gegebenen F_e .

$$(2) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_e) \quad (i = 1, \dots, n)$$

die y fest. (Wie sich dann die definierten Grössen gegen Parametertransformation verhalten, werden wir genau wie im euklidischen Fall ohne Mühe konstatieren.)

Was die Schmiege-Vektorräume $I_{12} \dots k$ betrifft, so müssen wir für ihre Definition die absoluten Ableitungen verwenden. Die Vektoren

$$(3) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \quad (p = 1, \dots, l)$$

spannen den I_1 auf. Durch absolute Differentiation der Vektoren (3) gewinnen wir die Raum-Vektoren

$$(4) \quad \frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta y_q \vartheta y_p} = \frac{\vartheta}{\vartheta y_q} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_j}{\partial y_p} \frac{\partial x_k}{\partial y_q},$$

die mit den Vektoren (3) zusammen den I_{12} aufspannen. Eine Parametertransformation (§ (1), (4)) führt zu

$$(5) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p}.$$

Da für die absolute Ableitung die Rechenregeln wie für die gewöhnliche gelten, folgt aus (5)

$$(6) \quad \frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta \bar{y}_q \vartheta \bar{y}_p} = \frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta y_r \vartheta y_s} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p} \frac{\partial y_s}{\partial \bar{y}_q} + \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial^2 y_r}{\partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q},$$

wo $\partial^2 y_r / \partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q$ die gewöhnliche zweite Ableitung von y_r nach $\bar{y}_p, \bar{y}_q$ ist. (Die absolute Ableitung betrifft ja nur Raum-Indizes.)

Aus (5) und (6) folgt die Invarianz der I_1, I_{12} gegen Parameter-Änderung. Wir definieren nun genau wie zuvor den I_2 als grössten Untervektorraum des I_{12} normal zum I_1 . Wenn dann wieder

$$(7) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}$$

die Projektion der zweiten absoluten Ableitung $\partial^2 x_i / \partial y_p \partial y_q$ in den I_2 bezeichnet, so folgt wie früher aus (6) der Flächentensorcharakter der Grössen (7), die den I_2 aufspannen.

Die Definition der $I_{12} \dots I_k$ - resp. I_k -Räume und der Nachweis der Invarianz gegen Parametertransformationen, sowie des Flächen-Tensorcharakters der Grössen

$$(8) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}}$$

geschieht wie im §1 und bietet keine Schwierigkeiten.

Wir haben noch nicht benutzt, dass der R_n von konstanter Krümmung ist. Diese Voraussetzung wollen wir nun zur Herleitung einer wichtigen Relation verwenden:

Wir gehen dabei von der Relation aus

$$(9) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_t}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y_q} \left[\frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_t}} \right) \right] \\ &= - R_{\cdot i a b}^i \frac{\partial^t x_j}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_t}} \frac{\partial x_a}{\partial y_q} \frac{\partial x_b}{\partial y_r}, \end{aligned}$$

die man aus (1) sofort ableitet, und in der

$$(10) \quad R_{i j a b} = k(g_{i a} g_{j b} - g_{i b} g_{j a})$$

der Krümmungstensor des R_n der konstanten Krümmung k ist. Setzt man (10) in (9) ein, so wird die rechte Seite gleich

$$- k \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \left(g_{j b} \frac{\partial^t x_j}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_t}} \frac{\partial x_b}{\partial y_r} \right) + k \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \left(g_{j a} \frac{\partial^t x_j}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_t}} \frac{\partial x_a}{\partial y_q} \right),$$

also Null für $t \neq 1$. Für $t = 1$ wird sie gleich

$$\begin{aligned}
& -k \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \left(g_{ib} \frac{\partial x_j}{\partial y_{p_1}} \frac{\partial x_b}{\partial y_r} \right) + k \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \left(g_{ia} \frac{\partial x_j}{\partial y_{p_1}} \frac{\partial x_a}{\partial y_q} \right) \\
& = -k \frac{\partial x_i}{\partial y_s} (\delta_q^s B_{p_1 r} - \delta_r^s B_{p_1 q}),
\end{aligned}$$

wo

$$(11) \quad B_{pq} = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_k}{\partial y_q}$$

der Masstensor der F_s (des I_1) ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
(12) \quad & \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y_q} \left[\frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) \right] \\
& = \begin{cases} 0, & \text{für } t \neq 1, \\ -k \frac{\partial x_i}{\partial y_s} (\delta_q^s B_{p_1 r} - \delta_r^s B_{p_1 q}), & \text{für } t = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir sind jetzt in der Lage die Symmetrie der Grössen (8) in bezug auf die Indizes $p_1, \dots, p_k$ nachzuweisen. Aus der Definition dieser Grössen als Projektion von

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}$$

in den I_k folgt

$$(13) \quad \frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} = \frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} + \text{Vektor des } I_{12 \dots t-1}.$$

Durch absolute Differentiation nach y_q erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
(14) \quad & \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) = \frac{\partial^{t+1} x_i}{\partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} = \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) \\
& + \text{Vektor des } I_{12 \dots t}.
\end{aligned}$$

Wir schreiben (14) anders

$$(14') \quad \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) = \frac{\partial^{t+1} x_i}{\partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} + \text{Vektor des } I_{12 \dots t}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach y_r

$$\begin{aligned}
(15) \quad & \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) \right] = \frac{\partial^{t+2} x_i}{\partial y_r \partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \\
& + \text{Vektor des } I_{12 \dots t+1},
\end{aligned}$$

und weiter durch Projektion in den I_{t+2}

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) \right] = \frac{\partial^{t+2} x_i}{\partial y_r \partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}}.$$

Aus (12) und (16) folgt die Symmetrie der linken also auch der rechten Seite von (16) in r und q .

Wir erhalten weiter aus (14'), bei Benutzung von (13) (für $t+1$ statt t)

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) = \frac{\partial^{t+1} x_i}{\partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} + \text{Vektor des } I_{12 \dots t},$$

was durch Differentiation und darauf folgender Projektion in den I_{t+2}

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial y_r} \left[\frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial^{t+1} x_i}{\partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right)$$

gibt, also (16),

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial^{t+1} x_i}{\partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}} \right) = \frac{\partial^{t+2} x_i}{\partial y_r \partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}}.$$

Haben wir gezeigt, dass

$$\frac{\partial^{t+1} x_i}{\partial y_q \partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_t}}$$

in den unteren Indizes symmetrisch ist, so folgt die Symmetrie der rechten Seite von (19) in den Indizes $q, p_1, \dots, p_t$. Aber wir zeigten soeben auch die Symmetrie in q und r . Das heisst also, da ($t=1$) $\partial^2 x_i / \partial y_q \partial y_p$ (offenbar) symmetrisch ist, dass die Grössen (8) symmetrische Flächentensoren darstellen.

Wir haben damit alles hergeleitet, was nötig ist, um die Verhältnisse aus dem euklidischen R_n auf unseren Fall zu übertragen. Die Masstensoren der I_k -Räume sind wie dort

$$(20) \quad E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k} = g_{ij} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \frac{\partial^k x_j}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_k}},$$

und aus ihnen werden die Grundtensoren wie dort durch symmetriesieren gewonnen. Die Frenet-Gleichungen §3 (11) ersetzt man durch ein völlig gleichgebautes System, nur dass für das gewöhnliche Differential auf der linken Seite das absolute Differential zu setzen ist. Dasselbe gilt für die Nebenbedingungen §4 (2), und für die wichtigen Formeln (5) und (7) des §4 erhalten wir dieselben Ausdrücke.

Was die Integrabilitätsbedingungen des neuen Systems der Frenet-Gleichungen betrifft, so lauten sie bis auf die zweite (nach (12)) genau wie die für den euklidischen Fall abgeleiteten.

Nur die der Gleichung ((15), §4) entsprechende lautet jetzt etwas anders, da der der Gleichung (§4 (13)) entsprechende Ausdruck für absolute Ableitungen jetzt nicht Null ist, sondern gleich ist der rechten Seite von (12). Aber an den Überlegungen, die dort zum Ziele führten, ist nichts zu ändern. Sie liefern genau wie dort den Beweis der Theoreme.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, N.J.