σ -IDÉAUX ENGENDRÉS PAR DES ENSEMBLES FERMÉS ET THÉORÈMES D'APPROXIMATION

BY

ALAIN LOUVEAU

ABSTRACT. This paper is motivated by the study of $\ast$ -games on ω , and by a question of D. A. Martin on the strength of the hypothesis $AD_\omega^\ast$ that every $\ast$ -game on ω is determined.

A general study of the σ -ideals of subsets of ω^ω generated by closed sets encompasses the $\ast$ -games and the "perfect set property".

Using associated games, we extend for these ideals many properties known for countable sets, under various hypotheses of determinacy. Our methods thus apply also to other examples of regularity properties, such as those introduced by A. S. Kechris.

Finally, a general theorem of approximation by analytic sets in Solovay's model is proved which, together with the preceding results, gives the solution of Martin's problem: $AD_\omega^\ast$ is true in Solovay's model.

Cet article est consacré à l'étude des liens existant entre certaines "bonnes" notions de petitesse pour les ensembles de réels et certains jeux infinis à information parfaite. De tels liens sont bien connus pour des notions classiques, comme la propriété de Baire ou la propriété de l'ensemble parfait. A. S. Kechris [6] a introduit une autre notion de petitesse, celle d'ensemble K_σ -borné (" σ -bounded set"), pour laquelle il est possible d'associer un jeu.

Notre travail est une généralisation de ce travail de Kechris, dans le but d'englober les jeux du type $G_\omega^\ast$. Nos méthodes permettent de démontrer la consistance relative de la détermination de tous les jeux du type $G_\omega^\ast$, ce qui répond à une question de D. A. Martin (cf. Théorème 4.4.)

Notre théorie pourrait être exposée dans le cas des jeux $G_\omega^\ast$, mais nous avons préféré donner des énoncés généraux, en partant de l'étude des notions de petitesse et non de l'étude des jeux, ce qui permet de donner d'autres applications, et d'isoler les notions importantes.

Parmi celles-ci, la plus importante est la notion de σ -idéal engendré par des ensembles fermés dans ω^ω . Toutes les notions classiques de petitesse n'entrent pas dans ce cadre: Par exemple, le σ -idéal des ensembles de mesure de Lebesgue nulle sur ω^ω , ou plus généralement de capacité nulle pour une capacité de Choquet, est engendré, en tant qu'idéal, par des G_δ , mais n'est pas engendré, comme σ -idéal, par des fermés de ω^ω . Il en est de même pour le σ -idéal des ensembles complètement Ramsey-négligeables (pour une définition, cf. [7]).

Received by the editors January 20, 1977 and, in revised form, September 15, 1977.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 04A15, 02K30, 28A05, 02K05; Secondary 02F35, 54H05, 02K35.

© 1980 American Mathematical Society
0002-9947/80/0000-0007/\$07.75

Cependant, comme nous le verrons, de nombreuses notions de petitesse entrent dans ce cadre. Le §1 est consacré à l'étude générale de ces σ -idéaux, et en particulier à établir la régularité des ensembles fermés pour les notions correspondantes d'approximation.

Dans le §2, nous introduisons la notion d'idéal paramétré, et démontrons, grâce à un lemme général de forcing, un théorème d'approximation dans le modèle de Lévy-Solovay: Tout ensemble est approximable de l'intérieur par un ensemble analytique (Σ_1^1). Le théorème fournit de nouvelles démonstrations des résultats de Solovay [13] concernant la propriété de Baire et la propriété de l'ensemble parfait, et est la clef permettant de répondre à la question de D. Martin.

Le §3 est consacré à l'étude d'une propriété plus restrictive vérifiée par certains idéaux de fermés, qui permet d'associer à un tel idéal un jeu sur ω (les jeux G_2^* et G_ω^* en sont des cas particuliers). Les méthodes de théorie des jeux, et principalement les techniques utilisées par Kechris (cf. [4] et [5]), permettent d'obtenir alors des théorèmes d'approximation pour les ensembles projectifs moyennant des hypothèses convenables, et des résultats effectifs comme l'existence d'un plus grand ensemble appartenant au σ -idéal et à une classe donnée de la hiérarchie effective.

Indépendamment, Kechris [6, §6] a développé une autre théorie de jeux asymétriques liés aux idéaux de fermés (cf. la fin du §3). Les méthodes de Kechris et les nôtres donnent pour certains idéaux (notamment l'idéal des ensembles compacts) les mêmes résultats d'approximation pour les ensembles projectifs.

Enfin, dans le §4, nous rassemblons les résultats des sections précédentes pour établir les propriétés cherchées sur le σ -idéal associé aux jeux G_ω^* . Nous analysons en détail plusieurs autres exemples, ce qui nous permet de montrer que l'analogie entre les différentes notions de petitesse introduites n'est pas complète: Pour certaines d'entre elles, l'assertion que le théorème d'approximation est vrai pour tous les ensembles Σ_2^1 est une assertion équivalente avec l'existence d'un cardinal inaccessible, tandis que pour d'autres notions de petitesse, la même assertion est une conséquence de l'axiome de Martin $+ 2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

0. Notations et rappels. Les notations utilisées ici sont les notations modernes telles qu'on peut les trouver par exemple dans le cours manuscrit de Kechris [5], ou le livre à paraître de Moschovakis [10]. Nous renvoyons également à ces deux ouvrages pour les principales notions introduites.

0.1. $\omega = \{0, 1, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels, muni de la topologie discrète. Les lettres k, l, m, n désigneront des entiers. L'espace de Baire ω^ω des fonctions de ω dans ω est muni de la topologie produit. Ses éléments seront désignés par les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

$\text{Seq } \omega$ est l'ensemble des suites finies d'entiers, désignées par les lettres $s, t, u, \dots$. $<$ est l'ordre des sections commençantes sur $\text{Seq } \omega$, et $|s|$ désigne la longueur de la suite s . Enfin $\wedge$ désigne l'opération de concaténation des suites.

Si $s \in \text{Seq } \omega$, on note $N_s = \{\alpha \in \omega^\omega \mid s < \alpha\}$. La famille $(N_s)_{s \in \text{Seq } \omega}$ engendre la topologie de ω^ω .

0.2. Nous serons principalement intéressés par les ensembles de la hiérarchie effective et de la hiérarchie projective. Nous renvoyons aux livres cités plus haut pour les définitions et les principales propriétés de ces classes. Les classes effectives seront notées $\Sigma_n^1, \Pi_n^1, \Delta_n^1$ ($\Sigma_n^1(\alpha)$, etc. . . ., pour les classes relativisées à $\alpha \in \omega^\omega$) et les classes projectives similairement $\Sigma_n^1, \Pi_n^1, \Delta_n^1$. Nous utiliserons cependant le plus souvent la terminologie classique pour les premières classes projectives: ouverts au lieu de Σ_1^0 , fermés au lieu de Π_1^0 , boréliens au lieu de Δ_1^1 et analytiques au lieu de Σ_1^1 .

0.3. Soit X un ensemble. Un arbre sur X est un sous-ensemble de $\text{Seq } X$ clos par sous-suites (donc la suite vide est dans tout arbre non vide). Si T est un arbre sur X , $[T] \subset X^\omega$ désigne l'ensemble des branches de T , c'est-à-dire l'ensemble des $f \in X^\omega$ tels que $\forall n \ f \upharpoonright_n \in T$. Un arbre est dit bien fondé si $[T] = \emptyset$.

Soit T un arbre sur $X_1 \times X_2$. Les éléments de T peuvent être identifiés à des couples (s, t) , $s \in \text{Seq } X_1$, $t \in \text{Seq } X_2$, $|s| = |t|$, et les branches de T à des couples (f_1, f_2) , $f_1 \in X_1^\omega$ et $f_2 \in X_2^\omega$. On note

$$p([T]) = \{f_1 \in X_1^\omega \mid \exists f_2 \in X_2^\omega (f_1, f_2) \in [T]\}.$$

Si $f_1 \in X_1^\omega$, on note $T_{f_1} = \{t \in \text{Seq } X_2 \mid (f_1 \upharpoonright_{|t|}, t) \in T\}$. T_{f_1} est un arbre sur X_2 et $f_1 \in p([T]) \leftrightarrow T_{f_1}$ n'est pas bien fondé.

Si T est un arbre sur X et $s \in \text{Seq } X$, on note $T_s = \{t \in \text{Seq } X, s \frown t \in T\}$.

L'intérêt des arbres est qu'ils permettent de représenter certaines classes d'ensembles:

Nous utiliserons fréquemment dans la suite les résultats suivants (cf. [5], [10]):

(i) Si F est un fermé de ω^ω , soit T_F l'arbre sur ω défini par $T_F = \{\alpha \upharpoonright_n, \alpha \in F, n \in \omega\}$. Alors $[T_F] = F$.

(ii) Soit A analytique, $A \subset \omega^\omega$. Il existe un arbre T sur $\omega \times \omega$ tel que $A = p([T])$.

(iii) Soit A un ensemble $\Sigma_2^1(\alpha)$, $A \subset \omega^\omega$. Il existe un arbre T sur $\omega \times \aleph_1$, constructible en α tel que $A = p([T])$.

0.4. Une exposition de la théorie des jeux infinis à information parfaite peut-être trouvée dans [1].

Nous rappellerons seulement quelques résultats:

Soit X un ensemble, et $A \subset X^\omega$. Le jeu $G_X(A)$ est défini de la manière suivante:

Deux joueurs, I et II, jouent successivement des éléments de X . I joue x_0 , II x_1 , I x_2 , etc. Le résultat du jeu est l'élément f de X^ω défini par $f(n) = x_n$. I gagne si $f \in A$. Une stratégie σ pour le joueur I est une application de $\text{Seq } X$ dans X : I joue selon σ si lorsque II a joué $(x_1, \dots, x_{2n-1})$, I répond par $x_{2n} = \sigma(x_1, \dots, x_{2n-1})$. On définit de même une notion de stratégie pour le joueur II. Si I joue selon σ et II selon τ , on note $\sigma * \tau$ le jeu résultant. σ est gagnante pour I si, pour toute τ , $\sigma * \tau \in A$. Le jeu $G_X(A)$ est dit déterminé si l'un des joueurs a une stratégie gagnante.

Les résultats suivants concernant les jeux déterminés nous seront utiles.

(1) Les jeux $G_X(A)$, où A est ouvert ou fermé dans X^ω , sont déterminés (Gale Stewart).

(2) Les jeux $G_X(A)$, où A est borélien dans X^ω , sont déterminés (Martin).

(3) S'il existe un cardinal mesurable, les jeux $G_\omega(A)$, $A \in \Sigma^1_1$ dans ω^ω , sont déterminés (Martin).

Si $\mathcal{Q}$ est une classe d'ensembles, nous noterons $\text{Det}_X(\mathcal{Q})$ l'assertion: "Tout jeu $G_X(A)$, $A \subset X^\omega$, $A \in \mathcal{Q}$, est déterminé." Si $\mathcal{Q} = \mathcal{V}$, l'assertion sera notée AD_X . Enfin si $X = \omega$, nous n'écrirons pas l'indice ω lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Ainsi $\text{Det}(\Sigma^1_1)$ est l'assertion (3), A.D. est l'axiome de détermination habituel, et P.D. désignera l'assertion: tout jeu projectif sur ω est déterminé.

Nous utiliserons aussi les deux résultats suivants (que l'on peut trouver dans [5]).

THÉORÈME (MOSCHOVAKIS). *Supposons $\text{Det}(\Delta^1_{2n})$.*

Soit A un ensemble Σ^1_{2n} , $A \subset \omega^\omega$. Si I a une stratégie gagnante dans le jeu $G(A)$, il a une stratégie gagnante Δ^1_{2n+1} (et de même pour II dans un jeu Π^1_{2n}).

THÉORÈME (MARTIN). $\text{Det}(\Delta^1_{2n}) \rightarrow \text{Det}(\Sigma^1_{2n})$.

0.5. Les jeux G^* sont définis de manière analogue aux jeux G : Si X est un ensemble et $A \subset X^\omega$, $G^*_X(A)$ est défini de la manière suivante: I joue $s_0 \in \text{Seq } X$, II joue $x_0 \in X$, I joue $s_1 \in \text{Seq } X$, II $x_1 \in X$, etc. Si $f = s_0 \hat{\ } x_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots$ est le résultat du jeu, I gagne $G^*_X(A)$ si $f \in A$. On définit de manière analogue les notions de stratégies, stratégies gagnantes et jeux déterminés.

Les énoncés correspondant aux jeux G^* seront notés avec un astérisque en indice. Dans [1], Morton Davis introduit les jeux G^* et démontre le résultat suivant, qui est à la base de notre travail:

Soit $A \subset 2^\omega$. Le jeu $G^*_2(A)$ est déterminé si et seulement si A est dénombrable ou contient un parfait.

C'est à des généralisations de ce résultat et à leurs conséquences que nous allons nous intéresser.

0.6. Les résultats de cet article sont démontrés dans $\text{ZF} + \text{DC}$ la théorie de Zermelo-Frankel avec l'axiome des choix dépendants, DC: Si R est une relation sur un ensemble X et $\forall x \in X \exists y \in X (x, y) \in R$, alors $\exists f \forall n (f(n), f(n+1)) \in R$. Lorsque nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire, cette hypothèse est indiquée.

Les lettres A.C. désignent l'axiome du choix, C.H. l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), et pour un cardinal $\aleph$, M.A.($\aleph$) l'axiome de Martin pour les familles d'ensembles denses de cardinal $\aleph$.

1. Idéaux de fermés.

DÉFINITION 1.1. Soit $\mathcal{T}$ une famille de fermés dans un espace polonais P . $\mathcal{T}$ est dit *idéal de fermés* si $\mathcal{T}$ est clos par sous-parties fermées, c'est-à-dire si

pour tout F élément de $\mathcal{T}$ et tout fermé F' contenu dans F , $F' \in \mathcal{T}$. (Nous ne supposons pas $\mathcal{T}$ clos par réunions finies. Nous nous intéresserons au σ -idéale engendré par $\mathcal{T}$, donc ce sera sans importance.)

$\mathcal{T}$ est dit *idéale propre* si d'une part tout fermé réduit à un point est élément de $\mathcal{T}$, et d'autre part tout élément de $\mathcal{T}$ est un fermé rare de P (i.e. d'intérieur vide).

Dans la suite, les idéaux que nous considérerons seront presque toujours des idéaux propres. Comme nous le verrons, cette restriction ne diminue pas la généralité des résultats.

Des exemples classiques d'idéaux propres sont l'idéal $\mathcal{T}_0$ des ensembles réduits à un point, et l'idéal $\mathcal{T}_1$ des fermés rares. Ce sont les cas extrêmes, puisque dire que l'idéal $\mathcal{T}$ est propre, c'est dire que $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.

A chaque idéal de fermés $\mathcal{T}$, nous allons associer d'autres familles d'ensembles. La terminologie utilisée suit la terminologie qui est classique dans le cas de l'idéal $\mathcal{T}_0$ (qui nous servira de référence pour tout ce travail).

DÉFINITION 1.2. Soit $\mathcal{T}$ un idéal de fermés. $\mathcal{T}_\sigma$ désignera le σ -idéale engendré par $\mathcal{T}$: Un sous-ensemble A de P est élément de $\mathcal{T}_\sigma$ s'il existe une suite $(F_n)_{n \in \omega}$ de fermés éléments de $\mathcal{T}$, telle que $A \subset \bigcup_{n \in \omega} F_n$.

Soit F un fermé non vide de P . F est dit $\mathcal{T}$ -parfait si aucun point de F n'a de voisinage (dans F) élément de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire si pour tout ouvert O de P , si $O \cap F \neq \emptyset$, alors $\overline{O} \cap F \notin \mathcal{T}$ ($\overline{O}$ désigne l'adhérence de O dans P).

Soit $\mathcal{T}$ un idéal propre de fermés de P , et F_0 un fermé de P . Définissons $\mathcal{T}_{F_0} = \{F \cap F_0, F \in \mathcal{T}\} = \{F \subset F_0, F \in \mathcal{T}\}$. L'idéal $\mathcal{T}_{F_0}$ est un idéal de fermés de F_0 , et on voit facilement que F_0 est un fermé $\mathcal{T}$ -parfait si et seulement si $\mathcal{T}_{F_0}$ est propre.

Le théorème qui suit est l'analogue d'un résultat classique dans le cas de l'idéal $\mathcal{T}_0$:

THÉORÈME 1.3. Soit $\mathcal{T}$ un idéal de fermés de P , et F un fermé de P . Il existe une partition unique de F en deux ensembles F' et A , tels que

- (i) A est élément de $\mathcal{T}_\sigma$.
- (ii) F' est un fermé $\mathcal{T}$ -parfait, ou vide.

DÉMONSTRATION. Il est possible d'utiliser, pour démontrer ce résultat, une technique de dérivation à la Cantor, inspirée du cas $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$. Nous utiliserons une autre méthode en remarquant tout d'abord le fait suivant: Soit O un ouvert, tel que $F \cap O$ soit non vide et dans $\mathcal{T}_\sigma$. Il existe alors un ouvert $O' \subset O$ tel que $F \cap O' \neq \emptyset$ et $F \cap \overline{O'} \in \mathcal{T}$.

En effet $F \cap O$ est un G_δ de P , donc vérifie le théorème de Baire. Par hypothèse, $F \cap O$ est recouvert par une suite $(F_n)_{n \in \omega}$ d'éléments de $\mathcal{T}$. Donc $F \cap O = \bigcup_{n \in \omega} F \cap O \cap F_n$, et d'après le théorème de Baire, l'un des $F \cap O \cap F_n$ est d'intérieur non vide dans $F \cap O$. D'où le résultat.

Par suite, un fermé F non vide est $\mathcal{T}$ -parfait si aucun point de F n'a de voisinage élément de $\mathcal{T}_\sigma$.

Soit alors $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts O de P tels que $O \cap F \in \mathcal{T}_\sigma$, et

$O_0 = U \emptyset$. Comme O_0 est union dénombrable d'éléments de $\emptyset$, $O_0 \in \mathfrak{T}_\sigma$. On pose alors $A = O_0 \cap F$ et $F' = F - O_0$. Comme $A = O_0 \cap F$, $A \in \mathfrak{T}_\sigma$. Soit O tel que $O \cap F' \in \mathfrak{T}_\sigma$. Alors $F \cap O \subset (F' \cap O) \cup A$ est élément de $\mathfrak{T}_\sigma$, donc $O \in \emptyset$, et par suite $O \subset O_0$; donc $O \cap F' = \emptyset$. Ceci montre que F' est vide ou $\mathfrak{T}$ -parfait.

Il reste à vérifier l'unicité. Si (F'_1, A_1) est une autre partition satisfaisant les conditions (i) et (ii), il existe un ouvert O_1 tel que $O_1 \cap F = A_1$. Par suite $O_1 \in \emptyset$, donc $A_1 \subset A$. D'autre part $F'_1 \cap O_0 \subset A$ est élément de $\mathfrak{T}_\sigma$, et donc vide puisque F'_1 est $\mathfrak{T}$ -parfait. Donc $F'_1 \subset F_1$. Ceci prouve que $F'_1 = F_1$ et $A_1 = A$. $\square$

Pour bien voir l'intérêt de ce théorème, nous allons introduire la définition suivante:

DÉFINITION 1.4. Soit $\mathfrak{T}$ un idéal de fermés de P , et $A \subset P$. A est dit $\mathfrak{T}$ -régulier si $A \in \mathfrak{T}_\sigma$ ou si A contient un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait.

Cette terminologie n'est pas classique. Il faut cependant noter que dans la cas de l'idéal $\mathfrak{T}_0$, la $\mathfrak{T}_0$ -régularité d'un ensemble A correspond à: " A est dénombrable ou contient un parfait", qui est bien la notion de régularité étudiée.

Du théorème précédent, on peut, en utilisant cette terminologie, déduire immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.5. (i) *Tout fermé de P est $\mathfrak{T}$ -régulier.*

(ii) *La notion de $\mathfrak{T}$ -régularité est une notion d'approximation par l'intérieur: Un ensemble A qui n'est pas dans $\mathfrak{T}_\sigma$ est $\mathfrak{T}$ -régulier si et seulement si il contient un fermé que n'est pas dans $\mathfrak{T}_\sigma$.*

REMARQUE. Dans la suite, nous allons nous intéresser à cette notion de $\mathfrak{T}$ -régularité, pour des idéaux $\mathfrak{T}$ variés. Cependant cette notion ne correspond pas toujours, dans les cas classiques, avec la notion de régularité étudiée. C'est en particulier le cas de la propriété de Baire: Soit $\mathfrak{T}_1$ l'idéal des fermés rares. $(\mathfrak{T}_1)_\sigma$ est le σ -idéal des ensembles maigres, et un fermé F non vide est $\mathfrak{T}_1$ -parfait s'il n'est maigre en aucun de ses points, c'est-à-dire si c'est un bon fermé: $(\text{Int } F) = F$. Par suite la propriété de $\mathfrak{T}_1$ -régularité n'a rien à voir avec la propriété de Baire: Par exemple il est facile de construire, dans ω^ω , un G_δ non maigre ne contenant aucun bon fermé. Donc il est faux en général que tout G_δ soit $\mathfrak{T}_1$ -régulier.

Nous nous restreindrons dans la suite aux idéaux propres de fermés sur ω^ω . Nous allons terminer cette section en montrant comment les résultats peuvent se généraliser.

PROPOSITION 1.6. *Soit $\mathfrak{T}$ un idéal propre de fermés d'un G_δ A de ω^ω , et soit $\mathfrak{T} = \{\bar{F}, F \in \mathfrak{T}\} \cup \mathfrak{T}_0$. Alors $\mathfrak{T}$ est un idéal propre de fermés de ω^ω , $\mathfrak{T}_A = \{F \cap A, F \in \mathfrak{T}\}$ est l'idéal $\mathfrak{T}$, et si B est un sous-ensemble de A , alors*

(i) $B \in \mathfrak{T}_\sigma \leftrightarrow B \in \mathfrak{T}_\sigma$.

(ii) Si B est fermé dans A , B $\mathfrak{T}$ -parfait $\leftrightarrow \bar{B}$ $\mathfrak{T}$ -parfait.

(iii) B $\mathfrak{T}$ -régulier $\rightarrow B$ est $\mathfrak{T}$ -régulier.

DÉMONSTRATION. $\mathfrak{T}$ est clairement un idéal propre. Si F est fermé relativement à A , alors $\bar{F} \cap A = F$. Par suite $\mathfrak{T} = \{F \cap A, F \in \mathfrak{T}\}$,

(i) Si $B \subset A$,

$$\begin{aligned} B \in \mathfrak{T}_\sigma &\leftrightarrow \exists (F_n)_{n \in \omega}, F_n \in \mathfrak{T}, \text{ tel que } B \subset UF_n \\ &\leftrightarrow \exists (F'_n)_{n \in \omega}, F'_n \in \mathfrak{T}, \text{ tel que } B \subset UF'_n \\ &\leftrightarrow B \in \mathfrak{T}_\sigma. \end{aligned}$$

(ii) Si de plus B est fermé dans A , $B \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} B \text{ n'est pas } \mathfrak{T}\text{-parfait} &\leftrightarrow \exists O \text{ ouvert fermé de } \omega^\omega \text{ tel que } O \cap B \neq \emptyset \\ &\quad \text{et } O \cap B \in \mathfrak{T} \\ &\leftrightarrow \exists O \text{ ouvert fermé de } \omega^\omega \text{ tel que } O \cap \bar{B} \neq \emptyset \\ &\quad \text{et } O \cap \bar{B} \in \mathfrak{T} \\ &\leftrightarrow B \text{ n'est pas } \mathfrak{T}\text{-parfait.} \end{aligned}$$

(iii) Soit B un ensemble $\mathfrak{T}$ -régulier. Si $B \notin \mathfrak{T}_\sigma$, $B \notin \mathfrak{T}_\sigma$ d'après (i) donc contient un fermé F de ω^ω $\mathfrak{T}$ -parfait. Mais comme $F \subset A$, F est $\mathfrak{T}$ -parfait d'après (ii). Donc B est $\mathfrak{T}$ -régulier. $\square$

Le résultat (iii) montre comment les résultats de régularité pour des idéaux propres de ω^ω peuvent s'étendre en résultats de régularité pour des idéaux propres de sous-ensembles G_δ de ω^ω .

Nous allons maintenant voir comment éliminer l'hypothèse $\mathfrak{T}$ propre. Tout d'abord si $\mathfrak{T}$ est quelconque, soit $A = \{\alpha \in \omega^\omega, \{\alpha\} \in \mathfrak{T}\}$, et soit $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{T}_0$. Clairement un ensemble B est $\mathfrak{T}$ -régulier si et seulement si $B \cap A^c \neq \emptyset$, ou $B \subset A$ et B est $\mathfrak{T}'$ -régulier. Nous pouvons donc supposer $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}$. La proposition qui suit montre que l'on peut se ramener au cas des idéaux propres:

PROPOSITION 1.7. *Soit $\mathfrak{T}$ un idéal de fermés de ω^ω , $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}$. Si $\omega^\omega \notin \mathfrak{T}_\sigma$, il existe un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait P et un idéal propre $\mathfrak{T}$ de fermés de ω^ω , canoniquement associés à $\mathfrak{T}$, tels que pour tout $A \subset \omega^\omega$, A est $\mathfrak{T}$ -régulier si et seulement si $A \cap P$ est $\mathfrak{T}$ -régulier.*

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 1.3 appliqué à ω^ω , si $\omega^\omega \notin \mathfrak{T}_\sigma$, alors il contient un plus grand fermé $\mathfrak{T}$ -parfait P . L'idéal $\mathfrak{T}_P$ est un idéal propre de fermés de P . Soit $\mathfrak{T}$ l'idéal propre sur ω^ω canoniquement associé à $\mathfrak{T}_P$ par la Proposition 1.6. Montrons que P et $\mathfrak{T}$ conviennent:

Comme $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}_0$ donc tout fermé $\mathfrak{T}$ -parfait est $\mathfrak{T}$ -parfait.

Soit A $\mathfrak{T}$ -régulier, et supposons $A \cap P \notin \mathfrak{T}_\sigma$. D'après 1.6(i), $A \cap P \notin (\mathfrak{T}_P)_\sigma$, donc $A \cap P \notin \mathfrak{T}_\sigma$. Donc $A \notin \mathfrak{T}_\sigma$, et d'après l'hypothèse A contient un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait F . Mais d'après le choix de P , $F \subset A \cap P$, et F est $\mathfrak{T}$ -parfait. Donc A $\mathfrak{T}$ -régulier $\rightarrow A \cap P$ $\mathfrak{T}$ -régulier. Réciproquement, supposons $A \cap P$ $\mathfrak{T}$ -régulier, et $A \notin \mathfrak{T}_\sigma$. Alors $A \cap P \notin \mathfrak{T}_\sigma$ (car sinon $A \cap P$ serait dans $\mathfrak{T}_\sigma$, et $A \subset (A \cap P) \cup \omega^\omega - P$ aussi). Par suite $A \cap P$ contient un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait F .

D'après 1.6(ii), F est $\mathfrak{T}_P$ -parfait, et comme $F \subset P$, F est $\mathfrak{T}$ -parfait. $\square$

D'après cette proposition, des résultats de régularité obtenus pour des idéaux propres s'étendent, pour de larges classes d'ensembles—par exemple pour les classes projectives de Lusin, en fait pour toutes les classes étudiées ici—aux idéaux de fermés quelconques. Nous poursuivrons l'étude de ces extensions dans le §3, lorsque nous établirons les théorèmes de $\mathcal{T}$ -régularité (qui, d'après la remarque suivant la Proposition 1.5, nécessitent des hypothèses supplémentaires sur les idéaux considérés).

Auparavant nous allons nous intéresser, dans le §2, à un résultat général sur les idéaux de fermés, qui permet d'approximer par l'intérieur dans le modèle de Lévy-Solovay, tout ensemble par un ensemble analytique (ce qui peut être traduit, de la manière habituelle, en résultats de consistance relative à la théorie $ZF + \text{"Il existe un cardinal inaccessible"}$).

2. Un théorème d'approximation dans le modèle de Lévy-Solovay. Pour une description précise du modèle de Lévy-Solovay, nous renvoyons à l'article de R. M. Solovay [13], dont nous suivons la terminologie et les notations dans cette section, et dont nous utiliserons les principaux résultats.

Rappelons brièvement que si $\mathcal{M}$ est un modèle de $ZF + AC + \text{"Il existe un cardinal } \Omega \text{ fortement inaccessible"}$, alors le modèle de Lévy-Solovay au-dessus de $\mathcal{M}$ est obtenu de la manière suivante: $\mathcal{N}$ est le modèle de $ZF + AC$ obtenu en ajoutant génériquement à $\mathcal{M}$ une famille $(f_\lambda)_{\lambda < \Omega}$ de fonctions $f_\lambda: \omega \rightarrow \lambda$ collapsant λ sur ω .

Si $\mathcal{N}_1$ est dans $\mathcal{N}$ la classe des ensembles héréditairement définissables en termes d'une suite d'ordinaux et d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{N}_1$ est le modèle de Lévy-Solovay associé à $\mathcal{M}$, et il est démontré dans [13] que $\mathcal{N}_1$ est un modèle de $ZF + DC$ qui satisfait de plus [13, Théorème 1]: "Tout ensemble de ω^ω est Lebesgue mesurable, a la propriété de Baire, et est dénombrable ou contient un parfait (i.e. est $\mathcal{T}_0$ -régulier)".

La démonstration de ce résultat passe par un résultat analogue concernant le modèle $\mathcal{N}$ (qui satisfait l'axiome du choix): Dans $\mathcal{N}$, tout sous-ensemble de ω^ω $\mathcal{M}$ -définissable en termes d'un réel est Lebesgue-mesurable, a la propriété de Baire et est $\mathcal{T}_0$ -régulier [13, Théorème 2]. Dans le cours de la démonstration de la $\mathcal{T}_0$ -régularité, Solovay utilise le lemme général de forcing suivant [13, Lemme I.2.5]: Soit $\mathcal{M}$ un modèle transitif de ZF , C_1 et C_2 deux ensembles de conditions de forcing dans $\mathcal{M}$, G_1 $\mathcal{M}$ -générique pour C_1 et G_2 $\mathcal{M}[G_1]$ -générique pour C_2 . Si $\alpha \in \omega^\omega$, et $\alpha \in \mathcal{M}[G_1] \cap \mathcal{M}[G_2]$, alors $\alpha \in \mathcal{M}$.

Dans cette section, nous allons démontrer une généralisation de ce lemme de forcing, ce qui donnera en retour le théorème d'approximation annoncé dans le modèle $\mathcal{N}_1$.

DÉFINITION 2.1. Soit $\mathcal{T}$ un idéal de fermés de ω^ω . $\mathcal{T}$ est dit *paramétré* s'il existe une famille $\Phi = \{F_\beta, \beta \in A\}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que

- (i) Φ est une base de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire $\forall F \in \mathcal{T}, \exists \beta \in A, F \subset F_\beta$.
- (ii) La relation (en α et β) $\Phi(\alpha, \beta) \leftrightarrow \beta \in A \wedge \alpha \in F_\beta$ est Π_1^0 .

(Nous identifions ici la famille Φ , le prédicat à deux variables et le fermé de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ correspondants.)

Si $\mathcal{T}$ est paramétré et Φ est $\Pi_1^0(\alpha_0)$, nous appelons $\alpha_0 \in \omega^\omega$ un paramètre pour $\mathcal{T}$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant:

THÉORÈME 2.2. *Soit $\mathcal{T}$ un idéal paramétré de fermés de ω^ω dans le modèle $\mathcal{N}$. Le modèle $\mathcal{N}$ satisfait l'assertion suivante: Pour tout ensemble A contenu dans ω^ω , $\mathcal{N}$ -définissable en terme d'un réel, qui n'est pas élément de $\mathcal{T}_\sigma$, il existe un sous-ensemble $\Sigma_1^1 B$ de A qui n'est pas élément de $\mathcal{T}_\sigma$.*

Par suite, dans le modèle $\mathcal{N}_1$, tout sous ensemble A de ω^ω qui n'est pas dans $\mathcal{T}_\sigma$ contient un analytique non dans $\mathcal{T}_\sigma$.

Remarquons que dans le cas de l'idéal $\mathcal{T}_0$ (qui est clairement paramétré avec comme relation Φ l'égalité), le théorème précédent, associé au résultat classique de Sierpinski (tout analytique non dénombrable contient un parfait), donne en particulier une démonstration du résultat de Solovay sur la $\mathcal{T}_0$ -régularité des ensembles dans le modèle $\mathcal{N}_1$. Nous verrons plus loin d'autres exemples d'application.

Nous allons d'abord établir le lemme de forcing annoncé:

LEMME 2.3. *Soit $\mathcal{N}$ un modèle transitif de ZF , $\Phi \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ une relation $\Pi_1^0(\alpha_0)$ dans $\mathcal{N}$, C_1 et C_2 deux ensembles ordonnés de $\mathcal{N}$, G_1 $\mathcal{N}$ -générique pour C_1 , et G_2 $\mathcal{N}[G_1]$ -générique pour C_2 .*

Soit $\alpha \in \omega^\omega \cap \mathcal{N}[G_1]$, $\beta \in \omega^\omega \cap \mathcal{N}[G_2]$ tels que $\mathcal{N}[G_1 \times G_2] \models \Phi(\alpha, \beta)$. Il existe alors $\gamma \in \omega^\omega \cap \mathcal{N}$ tel que $\mathcal{N}[G_1 \times G_2] \models \Phi(\alpha, \gamma)$.

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser le lemme classique suivant (cf. [13, Lemme I.2.4]): Soient C_1 et C_2 les deux ensembles ordonnés de $\mathcal{N}$, $C = C_1 \times C_2$, et soit $p \in C$, $p = \langle p_1, p_2 \rangle$ et φ tels que $\langle p_1, p_2 \rangle \Vdash \text{"}\mathcal{N}[G_1] \models \varphi\text{"}$ ($\Vdash$ est le forcing faible correspondant à C). Alors pour tout $q \in C_2$, $\langle p_1, q \rangle \Vdash \text{"}\mathcal{N}[G_1] \models \varphi\text{"}$.

Revenons à la démonstration du lemme. Φ étant $\Pi_1^0(\alpha_0)$, il existe un prédicat récursif Φ' tel que $\Phi(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \forall n \Phi'(\bar{\alpha}(n), \bar{\beta}(n), \bar{\alpha}_0(n))$. Soit $p = \langle p_0, q_0 \rangle$ un élément de $G_1 \times G_2$ tel que

$$p \Vdash \text{"}\alpha \in \mathcal{N}[G_1] \cap \omega^\omega\text{"} \wedge \text{"}\beta \in \mathcal{N}[G_2] \cap \omega^\omega\text{"} \wedge \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}).$$

Posons $A = \{s \in \text{Seq } \omega, \exists q \in C_2, q \leq q_0, \langle p_0, q \rangle \Vdash \hat{s} = \beta \upharpoonright_{|\hat{s}|}\}$. $A \in \mathcal{N}$, et A est clairement un arbre sur ω . Pour chaque $s \in A$, il existe $k \in \omega$ tel que $s \frown k \in A$: En effet il existe par hypothèse q tel que $\langle p_0, q \rangle \Vdash \beta \upharpoonright_{|\hat{s}|} = \hat{s}$. Comme $\langle p_0, q \rangle \Vdash \beta \in \omega^\omega$, $\langle p_0, q \rangle \Vdash \exists k (\beta(\hat{s}) = \hat{k})$. Soient alors k , et $\langle p_1, q_1 \rangle \leq \langle p_0, q \rangle$ tels que $\langle p_1, q_1 \rangle \Vdash \beta(\hat{s}) = \hat{k}$. Par absoluité $\langle p_1, q_1 \rangle \Vdash \text{"}\mathcal{N}[G_2] \models \beta(|s|) = k\text{"}$, donc $\langle p_0, q_1 \rangle \Vdash \text{"}\mathcal{N}[G_2] \models \beta(|s|) = k\text{"}$, donc $\langle p_0, q_1 \rangle \Vdash \beta(|\hat{s}|) = \hat{k}$ et $s \frown k \in A$.

Par suite, comme $\emptyset \in A$, il existe $\gamma \in [A] \cap \mathcal{N}$. Nous allons montrer que γ convient, c'est-à-dire que $\mathcal{N}[G_1 \times G_2] \models \Phi(\alpha, \gamma)$. Puisque $\langle p_0, q_0 \rangle \in G_1 \times G_2$, il suffit de prouver que pour tout n , $\langle p_0, q_0 \rangle \Vdash \Phi'(\bar{\alpha}(\hat{n}), \widehat{\gamma}(\hat{n}), \widehat{\alpha_0}(n))$.

Soit $s = \gamma \upharpoonright_n$. $s \in A$, donc il existe $q \leq q_0$, $\langle p_0, q \rangle \Vdash \beta \upharpoonright_{|\hat{s}|} = \hat{s}$.

Par suite $\langle p_0, q \rangle \Vdash \Phi'(\bar{\alpha}(\hat{n}), \widehat{\gamma}(n), \widehat{\alpha_0}(n))$. Par absoluité et en utilisant de nouveau le lemme précédent, on en déduit que

$$\langle p_0, q_0 \rangle \Vdash \Phi'(\widehat{\alpha}(n), \widehat{\gamma}(n), \widehat{\alpha_0}(n)).$$

2.4. *Démonstration du Théorème 2.2.* Par la technique utilisée par Solovay, il suffit de démontrer le théorème pour un ensemble $\mathcal{M}$ -définissable A , et un idéal de fermés $\mathcal{T}$ avec paramètre $\alpha_0 \in \mathcal{M}$, en augmentant si nécessaire $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}[\alpha'_0]$, avec un élément α'_0 de $\omega^\omega \cap \mathcal{N}$ qui code le paramètre de A et α_0 .

Supposons que A n'appartient pas à $\mathcal{T}_\sigma$. Alors certainement $A \not\subset \bigcup_{\beta \in \omega^\omega \cap \mathcal{M}} F_\beta$, puisque $\omega^\omega \cap \mathcal{M}$ est dénombrable dans $\mathcal{N}$. Soit α_1 un élément de $A \setminus (\bigcup_{\beta \in \mathcal{M}} F_\beta)$ et ξ un ordinal dénombrable de $\mathcal{N}$ (que l'on peut supposer $> \omega$) tel que $\alpha_1 \in \mathcal{M}[F_0]$, où F_0 est dans $\mathcal{N}$ une fonction de ω dans ξ , $\mathcal{M}$ -générique pour le forcing P_ξ qui détruit ξ . Il existe donc une formule $\psi(v_0, v_1, v_2, v_3)$ et un élément α de $\mathcal{M}$ tels que

$$\alpha_1(m) = n \leftrightarrow \mathcal{M}[F_0] \models \psi(\alpha, F_0, m, n).$$

En utilisant le lemme de vérité, on en déduit qu'il existe $f_0 \in P_\xi$ tel que si F est dans $\mathcal{N}$ une fonction de ω dans ξ , $\mathcal{M}$ -générique pour P_ξ , et si $f_0 \subset F$, alors, en définissant $\alpha = \varphi(F)$ par $\alpha(m) = n \leftrightarrow \mathcal{M}[F] \models \psi(\alpha, F, m, n)$, α est un élément de ω^ω , $\alpha \in A$, et $\alpha \notin \bigcup_{\beta \in \omega^\omega \cap \mathcal{M}} F_\beta$.

Posons $B = \{\varphi(F), F \in \mathcal{N}, F: \omega \rightarrow \xi \text{ est } \mathcal{M}\text{-générique pour } P_\xi, \text{ et } f_0 \subset F\}$. D'après ce qui précède, $B \subset A$. Nous allons prouver que B est Σ^1_1 , et $B \notin \mathcal{T}_\sigma$. Soit $X = \{F \in \mathcal{N}, F: \omega \rightarrow \xi \text{ est } \mathcal{M}\text{-générique pour } P_\xi, \text{ et } f_0 \subset F\}$. X est un sous-ensemble de ξ^ω et si on munit ξ^ω de la topologie produit de la topologie discrète sur ξ , l'application $\varphi: X \rightarrow \omega^\omega$ est clairement continue (par le lemme de vérité). D'autre part

$$X = \{F \in \xi^\omega, f_0 \subset F\} \cap \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_s \{F, F|_s \in X_n\},$$

où s varie dans les sous-ensembles finis de ξ , et $(X_n)_{n \in \omega}$ est dans $\mathcal{N}$ une énumération des sous-ensembles de P_ξ qui sont dans $\mathcal{M}$ et denses (cet ensemble est dénombrable dans $\mathcal{N}$). Par suite X est un G_δ de ξ^ω , et $B = \varphi(X)$ est Σ^1_1 .

Il reste à prouver que $B \notin \mathcal{T}_\sigma$. Supposons le contraire, et soit $(\beta_n)_{n \in \omega}$ une suite d'éléments de ω^ω telle que $B \subset \bigcup_{n \in \omega} F_{\beta_n}$. La suite $(\beta_n)_{n \in \omega}$ est élément d'un modèle $\mathcal{M}[F_{\xi'}]$, $\xi' < \Omega$.

Soit alors $F \in X$, F $\mathcal{M}[F_{\xi'}]$ -générique pour P_ξ (un tel F existe dans $\mathcal{N}$), et $\alpha = \varphi(F)$.

Puisque $\alpha \in B$, il existe un n tel que $\Phi(\alpha, \beta_n)$. On peut alors appliquer le Lemme 2.3: $\alpha \in \mathcal{M}[F]$, $\beta_n \in \mathcal{M}[F_{\xi'}]$, et $\mathcal{M}[F_{\xi'} \times F] \models \Phi(\alpha, \beta_n)$. Donc il existe $\gamma \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}[F_{\xi'} \times F] \models \Phi(\alpha, \gamma)$. Par absoluité, $\mathcal{N} \models \alpha \in F_\gamma$. Mais ceci contredit la définition de f_0 . $\square$

Il est clair, à partir de ce résultat, que pour obtenir un théorème de $\mathcal{T}$ -régularité pour les ensembles $\mathcal{M}$ -définissables en terme d'un réel dans $\mathcal{N}$, pour tous les sous-ensembles de ω^ω dans $\mathcal{N}$, il suffit de connaître le résultat pour les ensembles analytiques. C'est de cette façon que nous appliquerons ce résultat, après avoir démontré, dans le §3, la $\mathcal{T}$ -régularité des ensembles analy-

tiques pour une classe spéciale d'idéaux de fermés.

Il est à noter cependant que le Théorème 2.2 est beaucoup plus général et peut permettre de démontrer des résultats d'approximation très différents de la $\mathfrak{T}$ -régularité. Nous allons donner un exemple d'une telle utilisation du Théorème 2.2, en démontrant un autre résultat de Solovay [13, Théorème 1]: Dans $\mathcal{N}_1$, tout sous ensemble de ω^ω a la propriété de Baire. Cette démonstration n'est pas plus simple que celle de Solovay, mais très différente: la démonstration de Solovay repose sur le fait que l'algèbre de Boole des boréliens modulo les ensembles maigres est complète.

PROPOSITION 2.5. *L'idéal $\mathfrak{T}_1$, des fermés rares de ω^ω est un idéal paramétré.*

DÉMONSTRATION. Soit $n \mapsto O_n$ une énumération des ouverts fermés non vides de ω^ω , telle que la relation (en m et n) $O_m \subset O_n$, et la relation (en α et n) $\alpha \in O_n$ soient récursives. Soit Φ la relation

$$\Phi(\alpha, \beta) \leftrightarrow \forall n (\alpha \in O_{\beta(n)} \wedge O_n \not\subset O_{\beta(n)}).$$

Φ est Π_1^0 , et pour tout β , $F_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\} = \bigcap_{n \in \omega} O_{\beta(n)}$ si $\forall n O_n \not\subset O_{\beta(n)}$, $F_\beta = \emptyset$ sinon. Par suite clairement les F_β sont rares. Il existe alors β tel que $F = \bigcap_{n \in \omega} O_{\beta(n)}$, et on peut supposer que, si $m < n$, $O_{\beta(m)} \supset O_{\beta(n)}$. Soit $\beta': \omega \rightarrow \omega$ définie par $\beta'(n) = \inf\{m > n, O_n \not\subset O_{\beta(m)}\}$. β' est définie car F est rare. Enfin si on pose $\beta'' = \beta \circ \beta'$, alors $\forall n O_n \not\subset O_{\beta''(n)}$, et $F = \bigcap_{n \in \omega} O_{\beta''(n)}$, donc $F = F_{\beta''}$. Ceci prouve que Φ paramétrise l'idéal $\mathfrak{T}_1$. $\square$

COROLLAIRE 2.6. *Dans le modèle $\mathcal{N}$, tout sous-ensemble A de ω^ω , définissable en terme d'un réel et non maigre contient un analytique non maigre.*

De ce corollaire, une technique classique permet de déduire le résultat de Solovay:

COROLLAIRE 2.7. ([13, THÉORÈMES 1 ET 2]). *Dans le modèle $\mathcal{N}$, tout sous-ensemble de ω^ω $\mathcal{N}$ -définissable en terme d'un réel a la propriété de Baire. Par suite dans le modèle $\mathcal{N}_1$, tout sous-ensemble de ω^ω a la propriété de Baire.*

DÉMONSTRATION. Soit $A \subset \omega^\omega$, A $\mathcal{N}$ -définissable en terme d'un réel. Soit $\emptyset$ l'ensemble des ouverts O de ω^ω tels que $O \cap A$ soit co-maigre dans O . On vérifie facilement que $O_0 = U \emptyset$ est un élément de $\emptyset$, donc $O_0 - A$ est maigre. Soit $A' = A - O_0$. A' est $\mathcal{N}$ -définissable en termes d'un réel. Par suite si A' n'est pas maigre, il contient d'après le Corollaire 2.6 un analytique B non maigre. Mais comme B a la propriété de Baire, il existe un ouvert O non vide tel que $O \cap B$ soit co-maigre dans O . A fortiori $O \cap A$ est co-maigre dans O , donc $O \in \emptyset$ et $O \subset O_0$, ce qui est contradictoire. Par suite $A' = A - O_0$ est maigre et A a la propriété de Baire. $\square$

REMARQUE 2.8. L'autre résultat important d'approximation dans le modèle $\mathcal{N}$, démontré par Solovay par des techniques de forcing est le résultat de mesurabilité-Lebesgue des sous-ensembles de 2^ω . Nous allons montrer que ce résultat échappe à notre technique, et ceci parce qu'on ne peut pas remplacer,

dans le Lemme 2.3, l'hypothèse que Φ est une relation fermée par une hypothèse moins restrictive.

Soit μ la mesure de Lebesgue sur 2^ω , et $\mathcal{T}_\mu$ le σ -idéal des ensembles de mesure nulle. Ce σ -idéal ne peut être engendré par des fermés. Par contre, il est engendré, comme idéal, par les G_δ de mesure nulle, et il est facile de trouver $\Phi \subset 2^\omega \times 2^\omega$, Φ relation Π_2^0 , telle que

(i) Pour tout $\beta \in 2^\omega$, $\Phi_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\}$ est un G_δ de mesure nulle.

(ii) Pour tout $A \subset 2^\omega$, A de mesure nulle, il existe β tel que $A \subset \Phi_\beta$.

Malheureusement, l'analogue du Lemme 2.3 pour cette relation Π_2^0 est faux:

En effet soit $\mathcal{M}$ un modèle transitif de ZFC, et $C_1 = C_2 = \mathcal{B}_{0/\mathcal{T}_\mu} \dot{-} \{0\}$ l'ensemble de conditions de forcing de $\mathcal{M}$ qui ajoute un réel aléatoire.

Soit α_1 un réel aléatoire sur $\mathcal{M}$, et α_2 un réel $\mathcal{M}[\alpha_1]$ -générique pour C_2 . Alors

(i) α est un réel aléatoire au dessus de $\mathcal{M}$ si et seulement si α n'est dans aucun G_δ de mesure nulle à code dans $\mathcal{M}$;

(ii) α_2 est aléatoire au dessus de $\mathcal{M}$, mais n'est pas aléatoire au dessus de $\mathcal{M}[\alpha_1]$.

Par suite $\mathcal{M}[\alpha_1, \alpha_2]$ satisfait:

$$\alpha_2 \in \mathcal{M}[\alpha_2] \wedge \exists \beta \in \mathcal{M}[\alpha_1] \Phi(\alpha_2, \beta) \wedge \forall \gamma \in \mathcal{M} \cap \Phi(\alpha_2, \gamma).$$

3. Les jeux $G^\mathcal{T}$ et la $\mathcal{T}$ -régularité des ensembles projectifs. Dans le cas, qui nous sert de modèle, de l'idéal $\mathcal{T}_0$ des fermés réduits à un point, le théorème de $\mathcal{T}_0$ -régularité des ensembles Σ_1^1 (tout analytique non dénombrable contient un parfait) est dû à Sierpinski. La méthode de démonstration de Sierpinski, qui utilise ce que Dellacherie appelle un rabotage, a été systématisée et étendue par ce dernier, qui en déduit des théorèmes d'approximation pour les capacités scissipares (pour la définition de ces notions et les résultats de Dellacherie, cf. [2]). Malheureusement, ces résultats ne sont pas utilisables dans les cas qui nous intéressent, car ils nécessitent une hypothèse (grossièrement, qu'une intersection dénombrable de "gros" fermés soit non vide) qui n'est pas vérifiée en général.

Une autre méthode de démonstration du théorème de Sierpinski, plus récente, utilise la détermination des jeux infinis à information parfaite (cf. Davis [1]):

Il est possible d'associer à $\mathcal{T}_0$ un jeu, noté G_2^* , sur l'ensemble $\{0, 1\}$, tel que si A est un sous-ensemble de 2^ω , la détermination du jeu $G_2^*(A)$ soit équivalente à la $\mathcal{T}_0$ -régularité de A .

A partir de ce résultat, et en utilisant les résultats sur les jeux, il est possible de décrire le comportement des ensembles projectifs vis-à-vis de la $\mathcal{T}_0$ -régularité de manière très complète (cf. Kechris [4]).

C'est cette seconde méthode que nous allons systématiser. La Définition 3.1 dégage une condition suffisante sur $\mathcal{T}$ pour qu'un jeu puisse être associé à un idéal de fermés $\mathcal{T}$ de la même façon que G_2^* est associé à $\mathcal{T}_0$. On en déduit

ensuite des résultats de $\mathcal{T}$ -régularité pour les ensembles projectifs.

DEFINITION 3.1. Soit $\mathcal{T}$ un idéal propre de fermés de ω^ω . $\mathcal{T}$ est dit de *type bien fondé* s'il existe une famille dénombrable $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \omega}$ d'arbres sur ω satisfaisant

- (1) $\forall n$ R_n est bien fondé (i.e. $[R_n] = \emptyset$),
- (2) $\mathcal{T} = \{F, \forall n \in \omega \ R_n \not\subset F\}$.

La suite $\mathcal{R}$ est alors appelée une *règle* pour $\mathcal{T}$.

Cette définition appelle un certain nombre de remarques

(1) Pour chaque idéal $\mathcal{T}$, on peut toujours trouver un ensemble d'arbres sur ω satisfaisant (2): Il suffit de prendre l'ensemble des arbres T_F correspondant aux fermés qui ne sont pas dans $\mathcal{T}$. Dire que $\mathcal{T}$ est de type bien fondé, c'est donc ajouter, comme conditions sur $\mathcal{R}$, que $\mathcal{R}$ est dénombrable et formée d'arbres bien fondés.

(2) Dans la suite, la donnée d'un idéal de type bien fondé sera la donnée d'un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ satisfaisant (1) et (2).

(3) Si $\mathcal{T}$ est un idéal de type bien fondé, et α_0 est un élément de ω^ω qui code $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{T}$ est un idéal paramétré avec paramètre α_0 . Il suffit en effet de prendre pour relation Φ (sur $\omega^\omega \times (\text{Seq } \omega)^\omega$)

$$\Phi(\alpha, \beta) \leftrightarrow \forall n (\beta(n) \in R_n \wedge \beta(n) \not\prec \alpha).$$

Φ est alors $\Pi_1^0(\alpha_0)$. Si $\beta \in (\text{seq } \omega)^\omega$, et $F_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\}$, alors $\forall n, \beta(n) \in R_n$ et $\beta(n) \notin T_{F_\beta}$, donc d'après (2) $F_\beta \in \mathcal{T}$. Enfin si $F \in \mathcal{T}$, alors $\forall n \exists s \ s \in R_n$ et $s \notin F$, donc il existe $\beta \in (\text{seq } \omega)^\omega$ tel que $\forall n \ \beta(n) \in R_n$ et $\forall \alpha \in F, \beta(n) \not\prec \alpha$ donc $F \subset F_\beta$.

Dans la suite, nous supposons pour simplifier les notations, que $\mathcal{R}$ est codée par α_0 récursif, donc que Φ est Π_1^0 . Par relativisation, on en déduit facilement les résultats analogues dans le cas général.

(4) Lorsque $\mathcal{T}$ est un idéal de type bien fondé, avec règle $\mathcal{R}$, le fait que $\mathcal{T}$ est propre s'exprime de façon simple sur $\mathcal{R}$:

Notons, pour $s \in \text{Seq } \omega$, $C_s = \{n, R_n \subset T_{N_s}\}$ ($N_s = \{\alpha, s < \alpha\}$), et $\mathcal{R}_s = \{(R_n)_s, n \in C_s\}$ (rappelons que si T est un arbre, $T_s = \{s' \mid s' \hat{\ } s \in T\}$). Dire que tout fermé élément de $\mathcal{T}$ est rare, c'est dire que $\forall s \ N_s \notin \mathcal{T}$, donc que $\forall s \ \exists n \ R_n \subset T_{N_s}$, en d'autres termes que pour tout s , C_s est non vide. D'autre part, dire que tout fermé réduit à un point est dans $\mathcal{T}$, c'est dire que $\forall s \in \text{Seq } \omega, \forall n \in \omega, R_n \not\subset \{s', s' \prec s\}$, en d'autres termes que pour chaque $n \in C_s, (R_n)_s \neq \{\emptyset\}$,

Ces deux faits font que la définition qui suit est bien la définition d'un jeu infini:

DEFINITION 3.2. Soit $\mathcal{T}$ un idéal propre de fermés de ω^ω de type bien fondé, $\mathcal{R}$ une règle pour $\mathcal{T}$, et A un sous-ensemble de ω^ω . Le jeu infini à deux joueurs $G_A^\mathcal{T}$ est défini de la manière suivante: Le joueur I joue $n_0 \in \omega$, puis le joueur II joue $s_0 \in \text{Seq } \omega, s_0 \neq \emptyset, s_0 \in R_{n_0}$. I répond par $n_1 \in C_{s_0}, \dots$ etc. au k ème coup de la partie, I joue $n_k \in C_{s_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_{k-1}}$, et II une suite s_k non vide, $s_k \in (R_{n_k})_{s_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_{k-1}}$. Notons $\alpha = s_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_k \hat{\ } \dots$ le résultat de la partie. On dit que I gagne $G_A^\mathcal{T}$ si $\alpha \in A$.

Avant de démontrer que la détermination du jeu $G_A^{\mathfrak{T}}$ équivaut à la $\mathfrak{T}$ -régularité de l'ensemble A , nous allons introduire une version "avec témoin" du jeu précédent, que nous noterons $G^{\mathfrak{T}}$.

DÉFINITION 3.3. Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, soient λ un ordinal, et B un sous-ensemble de $\omega^\omega \times \lambda^\omega$. Le jeu $G_B^{\mathfrak{T}}$ est défini de la manière suivante: I joue un ordinal $\xi_0 < \lambda$, et $n_0 \in \omega$. II répond par $s_0 \neq \emptyset$, $s_0 \in R_{n_0}$, puis I joue un ordinal $\xi_1 < \lambda$ et $n_1 \in C_{s_0}$, etc.

Les règles de jeu sont les mêmes que dans les jeux $G^{\mathfrak{T}}$, sauf que le joueur I construit aussi un élément $f \in \lambda^\omega$ ($f = \xi_0, \xi_1, \dots$). Par définition, I gagne le jeu $G_B^{\mathfrak{T}}$ si $(\alpha, f) \in B$.

Le lemme qui suit est le résultat fondamental qui va permettre d'établir tous les résultats de cette section. C'est une généralisation de résultats connus (en particulier pour les jeux G_2^* et pour les jeux étudiés par Kechnis dans [6]), et surtout de techniques qui sont maintenant classiques pour ce genre de problèmes.

LEMME 3.4. Soit $B \subset \omega^\omega \times \lambda^\omega$, et $A = p(B) = \{\alpha \in \omega^\omega \mid \exists f \in \lambda^\omega (\alpha, f) \in B\}$.

(i) Si σ est une stratégie gagnante pour le joueur I dans le jeu G_B , on peut associer canoniquement à σ un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait F contenu dans A .

(ii) Si τ est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $G_B^{\mathfrak{T}}$, on peut associer canoniquement à τ un sous ensemble C_τ de $(\text{seq } \omega)^\omega$, de cardinalité au plus $\sup(\omega, \text{card } \lambda)$, tel que $A \subset \bigcup_{\beta \in C_\tau} F_\beta$ (si $\beta \in (\text{Seq } \omega)^\omega$, $F_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\}$ est défini, d'après la Remarque (2), par $F_\beta = \emptyset$ si $\exists n \beta(n) \notin R_n$, et $F_\beta = \{\alpha, \forall n \beta(n) \not\prec \alpha\}$ sinon).

DÉMONSTRATION. (i) Soit σ une stratégie gagnante pour I. Nous dirons qu'une suite $t = (s_0, s_1, \dots, s_{k-1})$ est σ -licite si elle correspond à un jeu possible de II, I jouant selon sa stratégie σ . Soit alors $T_\sigma = \{s, \exists t = (s_0, \dots, s_{k-1}) \sigma\text{-licite}, s \prec s_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_{k-1}\}$, T_σ est un arbre sur ω . Posons $F = [T_\sigma]$. Nous allons prouver que F convient.

(a) F est $\mathfrak{T}$ -parfait: Nous devons prouver que $\forall s \in \text{Seq } \omega$, si $N_s \cap F \neq \emptyset$, alors $N_s \cap F \notin \mathfrak{T}$. Soit donc s tel que $N_s \cap F \neq \emptyset$, c'est-à-dire $s \in T_\sigma$. D'après la définition de T_σ , il existe une suite σ -licite $t = (s_0, \dots, s_{k-1})$ telle que $s \prec s_0 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_{k-1} = s'$. Soit $n_k = \sigma(t)$. Pour chaque u élément de $(R_{n_k})_s$, $t \hat{\ } \{u\}$ est σ -licite. Donc $R_{n_k} \subset T_\sigma \cap T_N$, et par suite $N_s \cap F \notin \mathfrak{T}$.

(b) $F \subset A$: Soit $\alpha \in F$, et soit $T_\alpha = \{t = (s_0, \dots, s_{k-1}), t \text{ est } \sigma\text{-licite et } s_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_{k-1} \prec \alpha\}$. T_α est un arbre sur $\text{Seq } \omega$. Nous allons montrer que T_α n'est pas bien fondé, c'est-à-dire, intuitivement, que α correspond bien à une partie jouée dans le jeu $G_B^{\mathfrak{T}}$. Ce sera alors terminé: Si $(s_0, s_1, \dots, s_k, \dots)$ est une branche de T_α , c'est un jeu σ -licite pour II, et $s_0 \hat{\ } s_1 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_k \hat{\ } \dots = \alpha$. Soit $f \in \lambda^\omega$ le jeu correspondant de I par sa stratégie σ . Puisque σ est gagnante pour I, $(\alpha, f) \in B$, donc $\alpha \in A$.

Soit $t = (s_0, s_1, \dots, s_{k-1})$ un élément de T_α , $s' = s_0 \hat{\ } \dots \hat{\ } s_{k-1}$, et n_k l'entier joué par I suivant σ au k ème coup. Si s est tel que $t \hat{\ } \{s\} \in T_\alpha$ alors

$s \in (R_{n_k})_s$ et $s' \cap s < \alpha$. Puisque R_{n_k} est bien fondé, l'ensemble des s tels que $t \cap \{s\} \in T_\alpha$ est fini. Pour pouvoir appliquer le lemme de König à T_α , il suffit donc de prouver que T_α n'est pas fini. Mais s'il l'était, on pourrait trouver $t \in T_\alpha$ tel que (avec les mêmes définitions de s' et de n_k) pour chaque m , il existe $s \in (R_{n_k})_s$ tel que $\alpha|_m < s' \cap s$, et ceci contredit le fait que R_{n_k} est bien fondé.

(ii) Supposons maintenant que τ est une stratégie gagnante pour le second joueur. Nous dirons qu'une suite $(n_0, \xi_0, n_1, \xi_1, \dots, n_{k-1}, \xi_{k-1})$ est τ -licite si elle correspond à un jeu licite du joueur I dans G_B^σ , II jouant selon sa stratégie τ .

Nous allons associer à chaque suite τ -licite t et ordinal $\xi < \lambda$ une application $\beta_{t,\xi}$ de ω dans $\text{seq } \omega$: Soit $(s_0, \dots, s_{k-1})$ la réponse de II par τ au jeu t , et $s' = s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{k-1}$. Si $n \notin C_s$, on prend pour $\beta_{t,\xi}(n)$ un point quelconque de $R_n \dot{-} T_{N_s}$. Si $n \in C_s$, alors $\beta_{t,\xi}(n)$ est égal à $s' \cap s$, où s est la réponse de II par sa stratégie τ au jeu (licite) de I: $(n_0, \xi_0, \dots, n_{k-1}, \xi_{k-1}, n, \xi)$. Posons alors $C_\tau = \{\beta_{t,\xi}, t \text{ } \tau\text{-licite et } \xi < \lambda\}$. C_τ est clairement un sous-ensemble de $(\text{seq } \omega)^\omega$ de cardinalité au plus $\sup(\aleph_0, \text{card } \lambda)$. Nous allons montrer que C_τ convient, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in A$, il existe t τ -licite et $\xi < \lambda$ tels que $\alpha \in F_{\beta_{t,\xi}}$.

Soit donc $\alpha \in A$, et soit $f \in \lambda^\omega$ tel que $(\alpha, f) \in B$. Un couple (t, ξ) est (α, f) -bon si $t = (n_0, \xi_0, \dots, n_{k-1}, \xi_{k-1})$ est τ -licite, $\xi_0 = f(0), \dots, \xi_{k-1} = f(k-1)$ si $\xi = f(k)$, et, en notant $(s_0, \dots, s_{k-1})$ la réponse par τ de II au jeu t , si $s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{k-1} < \alpha$.

Si pour tout couple (t, ξ) (α, f) -bon, on peut trouver un entier n tel que le couple $(t \cap (n, \xi), f(k+1))$ soit (α, f) -bon, alors on peut trouver une partie de jeu G_B^σ , dans laquelle II joue selon τ , et qui produit le couple $(\alpha, f) \in B$, ce qui contredit le fait que τ est gagnante pour II. Il existe donc un couple (t, ξ) qui est (α, f) -bon et ne peut-être étendu. Pour ce couple, nous allons voir que $\alpha \in F_{\beta_{t,\xi}}$. D'une part, comme t est τ -licite, alors $\forall n \beta_{t,\xi}(n) \in R_n$, d'après la définition de $\beta_{t,\xi}$.

Si $n \notin C_{s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{k-1}}$, $\beta_{t,\xi}(n) \notin T_{N_{s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{k-1}}}$, donc $\beta_{t,\xi}(n) \not\prec \alpha$.

Si $n \in C_{s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{k-1}}$, alors $t \cap \langle n, \xi \rangle$ est τ -licite, donc si $\beta_{t,\xi}(n) < \alpha$, alors le couple $(t \cap (n, \xi), f(k+1))$ est (α, f) -bon, ce qui contredit le choix de (t, ξ) .

Donc pour tout n , $\beta_{t,\xi}(n) \not\prec \alpha$, c'est-à-dire $\alpha \in F_{\beta_{t,\xi}}$. $\square$

Comme première application de ce lemme, nous allons montrer que, $\mathfrak{T}$ étant de type bien fondé, la $\mathfrak{T}$ -régularité d'un ensemble A équivaut à la détermination du jeu G_A^σ . Plus précisément:

THÉORÈME 3.5. Soit $\mathfrak{T}$ un idéal de fermés de ω^ω , de type bien fondé, et $A \subset \omega^\omega$. Alors

(i) Le joueur I a une stratégie gagnante dans le jeu G_A^σ si et seulement si A contient un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait.

(ii) Le joueur II a une stratégie gagnante dans G_A^σ si et seulement si $A \in \mathfrak{T}_\sigma$.

Par suite, le jeu G_A^σ est déterminé si et seulement si A est régulier.

DÉMONSTRATION. Le jeu $G_A^{\mathfrak{T}}$ est un cas particulier des jeux $G_B^{\mathfrak{T}}$, avec $\lambda = 1$ et $B = A \times \{0\}$. Les implications ($\Rightarrow$) de (i) et (ii) se déduisent donc du Lemme 3.4. Il reste à établir les implications inverses:

(i) Soit F un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait, $F \subset A$. F étant $\mathfrak{T}$ -parfait, l'arbre T_F associé satisfait: $\forall s \in T_F, \exists n \in C_s, R_n \subset T_F$. La stratégie gagnante de I est alors claire: I oblige II à jouer des suites $(s_0, \dots, s_{k-1})$ telles que $s_0 \frown s_1 \frown \dots \frown s_{k-1} \in T_F$, en choisissant un entier $n_k \in C_{s_0 \frown s_1 \frown \dots \frown s_{k-1}}$ tel que $R_{n_k} \subset T_F$.

(ii) Soit $(F_n)_{n \in \omega}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{T}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \in \omega} F_n$. La stratégie gagnante du joueur II consiste à éviter, au k ième coup, le fermé F_k , ce qui assure que la suite α résultante ne sera pas dans A : Si I a joué $n_0, \dots, n_{k-1}$ et II $s_0, \dots, s_{k-1}$, alors quand I joue $n_k \in C_{s_0 \dots s_{k-1}}$, II peut trouver s_k tel que $s_0 \frown s_1 \frown \dots \frown s_{k-1} \frown s_k \in R_{n_k} - T_{F_k}$, puisque $F_k \in \mathfrak{T}$. Ceci définit clairement une stratégie gagnante. $\square$

Le théorème précédent permet d'obtenir des résultats de $\mathfrak{T}$ -régularité moyennant des hypothèses de détermination des jeux. Par exemple, l'axiome de détermination AD entraîne que tous les sous-ensembles de ω^ω sont $\mathfrak{T}$ -réguliers pour tout idéal de fermés de type bien fondé.

Cependant ce théorème est assez grossier: le meilleur résultat (dans ZF) que nous pouvons en déduire est la $\mathfrak{T}$ -régularité des ensembles boréliens. On n'obtient le résultat sur les ensembles analytiques que moyennant l'axiome $\text{Det}(\Sigma_1^1)$, qui est un axiome de grand cardinal.

En fait, nous utiliserons ce théorème dans l'autre sens, c'est-à-dire pour démontrer la détermination de certains jeux. Et c'est une utilisation plus fine du Lemme 3.4 qui va nous fournir les résultats de $\mathfrak{T}$ -régularité.

THÉORÈME 3.6. *Soit $\mathfrak{T}$ un idéal propre de type bien fondé de fermés de ω^ω , paramétré par une relation Π_1^0 , et A un sous ensemble de ω^ω .*

(i) *Si A est un ensemble $\Sigma_1^1(\alpha_0)$, alors ou bien A contient un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait, ou bien il existe une suite $(\beta_n)_{n \in \omega}$ d'éléments de $(\text{Seq } \omega)^\omega$ codée par un réel $\Delta_1^1(\alpha_0)$, telle que $\forall \alpha \in A \exists n \Phi(\alpha, \beta_n)$.*

En particulier, tout analytique est $\mathfrak{T}$ -régulier.

(ii) *Si A est un ensemble $\Sigma_2^1(\alpha_0)$, alors ou bien A contient un fermé $\mathfrak{T}$ -parfait, d'arbre constructible en α_0 , ou bien*

$$\forall \alpha \in A \exists \beta \in L[\alpha_0] \Phi(\alpha, \beta).$$

En particulier, si $\forall \alpha \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}$ -régulier.

(iii) *Supposons $\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$. Alors tout Σ_{2n+1}^1 est $\mathfrak{T}$ -régulier, et plus précisément, on a un résultat effectif analogue à celui de (i):*

Si A est un ensemble $\Sigma_{2n+1}^1(\alpha_0)$, et A ne contient aucun fermé $\mathfrak{T}$ -parfait, alors il existe une suite $(\beta_n)_{n \in \omega}$ d'éléments de $(\text{Seq } \omega)^\omega$, codée par un réel $\Delta_{2n+1}^1(\alpha_0)$, telle que $\forall \alpha \in A \exists n \Phi(\alpha, \beta_n)$.

DÉMONSTRATION. (i) Soit A un ensemble Σ_1^1 (le résultat relativisé se démontre de la même façon). Il existe un ensemble $\Pi_1^0 B$ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $A = p(B)$. Le jeu $G_B^{\mathfrak{T}}$ est alors Π_1^0 , donc déterminé d'après Gale-Stewart. On applique alors le Lemme 3.4 à ce jeu, ce qui fournit le résultat, en utilisant,

pour le résultat effectif, le fait que si Π a une stratégie gagnante dans $G_B^{\mathfrak{T}}$, alors il a une stratégie τ qui est Δ_1^1 , et que par suite l'ensemble C_τ peut être codé de façon Δ_1^1 .

(iii) Le résultat pour $A \in \Sigma_{2n+1}^1$ se démontre de manière rigoureusement semblable, en utilisant un ensemble $B \in \Pi_{2n}^1$ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $A = p(B)$. Le jeu $G_B^{\mathfrak{T}}$ est alors Π_{2n}^1 , donc déterminé d'après le théorème de Martin et notre hypothèse $\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$. On utilise alors le Lemme 3.4 et le fait que si Π a une stratégie gagnante dans $G_B^{\mathfrak{T}}$, il a une stratégie gagnante Δ_{2n+1}^1 .

(ii) Supposons pour simplifier que A est un ensemble Σ_2^1 , le résultat relativisé se démontrant de la même façon. Il existe alors un arbre T sur $\omega \times \aleph_1$, T constructible, tel que si $B = [T]$, alors $A = p(B)$.

Le jeu $G_B^{\mathfrak{T}}$ est alors un jeu fermé, donc déterminé. De plus, par absoluité des jeux fermés, le joueur I (respectivement II) a une stratégie gagnante dans ce jeu si et seulement si il a une stratégie gagnante constructible σ (respectivement τ). L'ensemble T_σ (respectivement C_τ) du Lemme 3.4 est alors constructible, ce qui démontre (ii). $\square$

Maintenant que nous avons démontré la $\mathfrak{T}$ -régularité des ensembles analytiques, pour $\mathfrak{T}$ de type bien fondé, nous pouvons utiliser les résultats du §2 pour compléter nos résultats de $\mathfrak{T}$ -régularité:

THÉORÈME 3.7. *Soit $\mathcal{N}$ le modèle de Lévy du §2, et dans $\mathcal{N}$ soit $\mathfrak{T}$ un idéal de fermés de ω^ω de type bien fondé. Alors dans $\mathcal{N}$ tout sous-ensemble de ω^ω $\mathcal{N}$ -définissable en terme d'un réel est $\mathfrak{T}$ -régulier. Par suite, dans le modèle $\mathcal{N}_1$ de Levy-Solovay, tout sous-ensemble de ω^ω est $\mathfrak{T}$ -régulier.*

REMARQUE 3.8. Il est possible de généraliser légèrement le Lemme 3.4, et par suite les résultats précédents. Nous allons indiquer brièvement comment ceci est possible. Nous avons vu, dans le §1, qu'il était possible d'associer canoniquement à un idéal propre $\mathfrak{T}$ de fermés sur un sous-ensemble fermé P de ω^ω un idéal propre $\mathfrak{T}$ de fermés de ω^ω (et réciproquement). Il est facile de voir que l'idéal $\mathfrak{T}$ est de type bien fondé si et seulement si il existe une suite $(R_n)_{n \in \omega}$ d'arbres bien fondés sur ω , telle que $\forall n \ R_n \subset T_P$ et telle que $\mathfrak{T} = \{F \subset P, \forall n \ R_n \not\subset F\}$ ce qui correspond à la définition naturelle d'idéal de fermés de type bien fondé sur P .

Supposons maintenant que A_0 soit un G_δ de ω^ω , et soit $\mathfrak{T}$ un idéal propre de fermés de A_0 . Nous dirons, par analogie, que $\mathfrak{T}$ est de type bien fondé, s'il existe une suite $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \omega}$ d'arbres sur ω telle que

- (i) $\forall n \ [R_n] \cap A_0 = \emptyset$,
- (ii) $\mathfrak{T} = \{F \text{ fermés dans } A_0 \mid \forall n \ R_n \not\subset F\}$ ($\bar{F}$ désigne l'adhérence de F dans ω^ω).

Il est facile de voir que cette définition coïncide avec la précédente lorsque A_0 est fermé. Cependant, il est faux en général que, si $\mathfrak{T}$ est de type bien fondé sur A_0 , alors l'idéal $\mathfrak{T}$ canoniquement associé sur ω^ω soit de type bien fondé. Malgré ce fait, en définissant de la même manière les jeux $G_A^{\mathfrak{T}}$ et $G_B^{\mathfrak{T}}$, pour $A \subset A_0$ et $p(B) \subset A_0$, les conclusions du Lemme 3.4 subsistent, donc

aussi les résultats des Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7, en supposant évidemment, pour les résultats effectifs, que A_0 est un ensemble Π_2^0 .

La seule difficulté pour adapter la démonstration du Lemme 3.4 réside dans le fait que l'on n'a plus $[T_\sigma] \subset A$ dans le cas (i). Cependant on montre facilement, en utilisant le fait que si $\alpha \in A_0$, alors $\forall n \alpha \notin [R_n]$, que $[T_\sigma] \cap A_0 \subset A$, ce qui suffit à prouver le lemme.

Nous verrons dans le §4 l'intérêt de cette généralisation dans le cas particulier, étudié par Kechris dans [6], des ensembles K_σ -bornés.

Auparavant, nous allons terminer le §3 par une étude plus précise des ensembles "petits" associés à un idéal de type bien fondé. Dans le cas fondamental de l'idéal $\mathfrak{T}_0$, les ensembles du σ -idéal associé sont les ensembles dénombrables. Une étude très complète des ensembles projectifs dénombrables a été faite par Kechris dans [4]. Certains de ses résultats, concernant en particulier l'existence d'un plus grand ensemble dénombrable d'une classe projective effective donnée, sont en fait établis pour des classes plus générales de notions de "petitesse", moyennant certaines hypothèses.

Nous allons utiliser ici ces résultats, en prouvant que les hypothèses introduites par Kechris sont vérifiées dans les cas qui nous occupent. Les idées des démonstrations qui suivent se trouvent dans les articles de Kechris ([3] et [4]).

DÉFINITION 3.9. Soit $\mathfrak{T}$ un idéal de fermés de ω^ω . Un ensemble A est dit $\mathfrak{T}$ -mince si A ne contient aucun fermé $\mathfrak{T}$ -parfait.

La terminologie suit la terminologie ("ensemble mince") utilisée dans le cas de l'idéal $\mathfrak{T}_0$. Nous noterons $M_{\mathfrak{T}}$ l'ensemble des parties $\mathfrak{T}$ -minces. Evidemment si $A \in M_{\mathfrak{T}}$ et A est $\mathfrak{T}$ -régulier, alors $A \in \mathfrak{T}_\sigma$.

Kechris introduit dans [3] une propriété d'additivité des familles d'ensembles:

DÉFINITION 3.10 (KECHRIS). Si Φ est une famille de parties de ω^ω , et Γ est une classe adéquate, Φ est dite Γ -additive si elle vérifie la propriété suivante: Pour toute famille $\psi = (A_\xi)_{\xi < \lambda}$ d'éléments de Φ , où λ est un ordinal, telle que le pré bon ordre $\leq_\psi$ défini par

$$x \leq_\psi y \leftrightarrow x \in \bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi \wedge y \in \bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi \wedge \inf\{\xi \mid x \in A_\xi\} \leq \inf\{\xi \mid y \in A_\xi\}$$

est, comme sous ensemble de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, dans Γ , alors $\bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi \in \Phi$.

PROPOSITION 3.11. Soit $\mathfrak{T}$ un idéal propre de fermés de ω^ω de type bien fondé, et soit Γ une classe adéquate formée d'ensembles ayant la propriété de Baire. Alors $M_{\mathfrak{T}}$ est Γ -additive.

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser le théorème de Kuratowski-Ulam sur la propriété de Baire (qui est l'analogue du théorème de Fubini pour la mesure): Si $A \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ a la propriété de Baire, alors l'ensemble des $\alpha \in \omega^\omega$ tels que la coupe A_α ait la propriété de Baire est co-maigre dans ω^ω .

Nous allons en fait démontrer la Proposition 3.11 pour tout idéal propre de type bien fondé de fermés d'un sous-ensemble fermé de ω^ω (cf. Remarque 3.8).

La démonstration se fait par l'absurde: Si l'assertion est fausse, nous pouvons trouver un contre exemple d'ordinal λ minimum, soit $(P, \mathcal{T}, (A_\xi)_{\xi < \lambda} = \Phi)$ tels que P est fermé dans ω^ω , $\mathcal{T}$ est un idéal propre de type bien fondé de fermés de P , $\leq_\Phi$ est dans Γ et cependant $\bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi \notin M_{\mathcal{T}}$.

D'après l'hypothèse, $\bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi$ contient un fermé $\mathcal{T}$ -parfait P_1 . Considérons $\mathcal{T}_1 = \{F \cap P_1, F \in \mathcal{T}\}$. $\mathcal{T}_1$ est un idéal propre de type bien fondé de fermés de P_1 .

Pour tout ξ , soit $B_\xi = A_\xi \cap P_1$, et soit $\Phi_1 = \{B_\xi, \xi < \lambda\}$. Chaque B_ξ est clairement $\mathcal{T}_1$ -mince. De plus, en utilisant le théorème de Kuratowski-Ulam au graphe de $\leq_\Phi$, il existe un ensemble co-maigre X de P_1 tel que, si $y_0 \in X$, alors les graphes des relations $x \leq_{\Phi_1} y_0$, $y \leq_{\Phi_1} y_0$ et $x \leq_{\Phi_1}^y y$ définie par $x \leq_{\Phi_1}^y y \leftrightarrow x \leq_{\Phi_1} y_0 \wedge y \leq_{\Phi_1} y_0 \wedge x \leq_{\Phi_1} y$ sont des ensembles ayant la propriété de Baire. Par suite, en posant $\xi_{y_0} = \inf\{\xi, y_0 \in B_\xi\}$, on obtient que pour tout $y_0 \in X$, $\bigcup_{\xi < \xi_{y_0}} B_\xi$ est $M_{\mathcal{T}_1}$ -mince (d'après la minimalité de λ).

Supposons avoir démontré que tout ensemble $\mathcal{T}_1$ -mince et ayant la propriété de Baire est maigre dans P_1 . Il existe alors sur P_1 une famille $\Phi_1 = (B_\xi)_{\xi < \lambda}$ dont le pré-bon ordre associé $\leq_{\Phi_1}$ a la propriété de Baire, et tel que pour tout élément x de l'ensemble co-maigre X , le segment initial $\{y, y \leq_{\Phi_1} x\}$ est maigre. Ceci implique, de nouveau en utilisant le théorème de Kuratowski-Ulam, que $P_1 = \bigcup_{\xi < \lambda} B_\xi$ est aussi maigre dans P_1 , ce qui est contradictoire, et prouve la proposition.

Il reste à voir qu'un ensemble A $\mathcal{T}_1$ -mince et ayant la propriété de Baire est maigre. Soit B un G_δ contenu dans A . B est $\mathcal{T}_1$ -mince et $\mathcal{T}_1$ -régulier d'après le Théorème 3.6, donc B est dans $(\mathcal{T}_1)_\sigma$. Mais comme $\mathcal{T}_1$ est un idéal propre de P_1 , tout élément de $\mathcal{T}_1$ est rare dans P_1 , donc B est maigre dans P_1 . A ayant la propriété de Baire, ceci montre que A lui-même est maigre dans P_1 . $\square$

Pour pouvoir appliquer les résultats de Kechris, nous avons besoin d'un autre résultat concernant $M_{\mathcal{T}}$:

PROPOSITION 3.12. *Supposons $\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$, si $n > 0$. Soit $G \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ un ensemble Π_{2n+1}^1 qui est universel pour les Π_{2n+1}^1 de ω^ω , et soit $\mathcal{T}$ un idéal propre de fermés de ω^ω , de type bien fondé, paramétré par une relation Π_1^0 . La relation $M_{\mathcal{T}}^{2n+1}(\alpha) \leftrightarrow \omega^\omega \dot{-} G_\alpha$ est $\mathcal{T}$ -mince" est une relation Π_{2n+1}^1 .*

DÉMONSTRATION. Soit A un ensemble $\Sigma_{2n+1}^1(\alpha)$ contenu dans ω^ω , et $B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$, $B \in \Pi_{2n}^1$, tel que $A = p(B)$. A est $\mathcal{T}$ -mince, d'après le Lemme 3.4, si et seulement si I n'a pas de stratégie gagnante dans G_B , donc si et seulement si II a une stratégie gagnante puisque le jeu $G_B^{\mathcal{T}}$ est déterminé d'après l'hypothèse faite, car Π_{2n}^1 . Ceci s'écrit clairement de façon Π_{2n+1}^1 . $\square$

Nous pouvons maintenant appliquer l'un des théorèmes généraux de Kechris [4, Théorème 1.A-2]:

THÉORÈME 3.13. *Soit $\mathcal{T}$ de type bien fondé, paramétré par une relation Π_1^0 .*

(i) *Supposons $\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$ si $n > 0$. Il existe un plus grand ensemble Π_{2n+1}^1 et $\mathcal{T}$ -mince.*

(ii) *Supposons de plus $\text{Det}(\Sigma_{2n+1}^1)$. Il existe alors un plus grand ensemble Σ_{2n+2}^1 dans $\mathcal{T}_\sigma$.*

DÉMONSTRATION. (i) est une conséquence directe du théorème 1.A-2 de [4] et des Propositions 3.11 et 3.12.

(ii) Si on suppose $\text{Det}(\Sigma_{2n+1}^1)$, alors par le Théorème 3.5 tout Π_{2n+1}^1 est $\mathcal{T}$ -régulier. L'existence d'un plus grand ensemble Π_{2n+1}^1 dans $\mathcal{T}_\sigma$ se déduit donc de (i). Soit $G \subset \omega \times \omega^\omega \times \omega^\omega$ un Π_{2n+1}^1 universel pour les ensembles Π_{2n+1}^1 de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, et ϕ une Π_{2n+1}^1 -norme sur G , qui existe puisque nous avons supposé $\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$. Définissons $C_{2n+2}^\mathcal{T} = \{\alpha \in \omega^\omega, \exists i \exists \beta G(i, \alpha, \beta) \wedge \{\alpha', \exists \beta' \phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta)\} \in \mathcal{T}_\sigma\}$. Nous allons montrer que $C_{2n+2}^\mathcal{T}$ est le plus grand ensemble Σ_{2n+2}^1 dans $\mathcal{T}_\sigma$.

Tout d'abord $C_{2n+2}^\mathcal{T}$ est Σ_{2n+2}^1 . En effet, $C_{2n+2}^\mathcal{T} = \bigcup_{i \in \omega} D_i$, où

$$\begin{aligned} D_i &= \{\alpha \in \omega^\omega, \exists \beta G(i, \alpha, \beta) \wedge \{\alpha', \exists \beta' \phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta)\} \in \mathcal{T}_\sigma\} \\ &= \{\alpha \in \omega^\omega, \exists \beta G(i, \alpha, \beta) \wedge \exists (\beta_k)_{k \in \omega} \\ &\quad \forall \alpha' [\exists k \Phi(\alpha', \beta_k) \vee \forall \beta' \neg (\phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta))]\} \end{aligned}$$

et par suite D_i est Σ_{2n+2}^1 .

Pour $\xi < |\phi|$, soit $D_{i,\xi} = \{\alpha \in D_i, \exists \beta G(i, \alpha, \beta) \wedge \phi(i, \alpha, \beta) \leq \xi\}$. On a $D_i = \bigcup_{\xi < |\phi|} D_{i,\xi}$, et le pré-bon ordre associé à la famille $D_{i,\xi}$ sur D_i est défini par

$$\begin{aligned} \alpha' <_{i,\xi} \alpha &\leftrightarrow \alpha' \in D_i \wedge \alpha \in D_i \wedge \exists \beta \exists \beta' [G(i, \alpha, \beta) \wedge G(i, \alpha', \beta') \\ &\quad \wedge \phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta)] \end{aligned}$$

donc est Σ_{2n+2}^1 . Enfin pour tout $\alpha \in D_i$, $\{\alpha', \alpha' <_{i,\xi} \alpha\}$ est dans $\mathcal{T}_\sigma$ par définition de D_i . Comme d'après l'hypothèse $\text{Det}(\Sigma_{2n+1}^1)$, tout Σ_{2n+2}^1 a la propriété de Baire, nous pouvons appliquer 3.11: chaque D_i est $\mathcal{T}$ -mince, c'est-à-dire d'après le Théorème 3.6 est dans $\mathcal{T}_\sigma$. Donc $C_{2n+2}^\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}_\sigma$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{T}_\sigma$, A un ensemble Σ_{2n+2}^1 . Il existe alors un entier i tel que $\alpha \in A \leftrightarrow \exists \beta G(i, \alpha, \beta)$, et comme $A \in \mathcal{T}_\sigma$, pour tout $\alpha \in A$, $\alpha \in C_{2n+2}^\mathcal{T}$. Donc $C_{2n+2}^\mathcal{T}$ est le plus grand Σ_{2n+2}^1 dans $\mathcal{T}_\sigma$. $\square$

THÉORÈME 3.14. *Nous gardons les mêmes hypothèses sur $\mathcal{T}$ que dans le Théorème 3.13. Alors*

- (i) $C_1^\mathcal{T} = \{\alpha, \exists \beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap L_{\omega_1^\mathcal{T}} \Phi(\alpha\beta)\}$ est le plus grand Π_1^1 $\mathcal{T}$ -mince.
- (ii) Si $\aleph_1^\mathcal{T} < \aleph_1$, alors $C_2^\mathcal{T} = \{\alpha, \exists \beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap L \Phi(\alpha, \beta)\}$ est le plus grand Σ_2^1 dans $\mathcal{T}_\sigma$.

DÉMONSTRATION. La partie (ii) est une conséquence immédiate du Théorème 3.6(ii). Pour démontrer (i), nous allons adapter la démonstration de Kechris du cas $\mathcal{T}_0$ (cf. [4, Théorème 2.A-1]).

Tout d'abord, le résultat 3.6(ii) peut être amélioré de la manière suivante: Soit T un arbre sur $\omega \times \lambda$, et $A = p([T])$. Si A ne contient aucun fermé $\mathcal{T}$ -parfait, alors pour tout $\alpha \in A$, il existe $\beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap T^+$ tel que $\Phi(\alpha, \beta)$, où T^+ est le plus petit ensemble admissible contenant T . La démonstration de ce résultat est analogue à celle de 3.6(ii), en utilisant l'absoluité des jeux fermés.

Supposons que A est $\mathcal{T}$ -mince et Π_1^1 . Nous voulons prouver que $A \subset C_1^\mathcal{T}$.

Puisque A est Π_1^1 , il existe un arbre récursif T sur $\omega \times \omega$ tel que $\alpha \in A \leftrightarrow T(\alpha)$ est bien fondé.

Soit $\alpha \in A$, et $\xi = |T(\alpha)|$. Comme $T(\alpha)$ est récursif en α , $\xi < \omega_1^\alpha$. Posons $A' = \{ \beta \in A, |T(\beta)| < \xi \}$. Comme $A' \subset A$, A' est $\mathcal{T}$ -mince. De plus $\alpha \in A'$.

Soit T' un arbre sur $\omega \times \xi$, $T' \in L_{\omega_1^\alpha}$ tel que $A' = p([T'])$. D'après le fait énoncé plus haut, il existe donc $\beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap (T')^+$ tel que $\Phi(\alpha, \beta)$. Mais comme $T' \in L_{\omega_1^\alpha}$, $(T')^+ \subset L_{\omega_1^\alpha}$, donc $\beta \in L_{\omega_1^\alpha}$ et $\alpha \in C_1^\mathcal{T}$.

Réciproquement, nous devons montrer que $C_1^\mathcal{T}$ est Π_1^1 et $\mathcal{T}$ -mince.

$$\alpha \in C_1^\mathcal{T} \leftrightarrow \exists \beta \in \Delta_1^1(\alpha) \exists \gamma \in \Delta_1^1(\alpha) [\gamma \in WO \wedge \beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap L_{|\gamma|} \wedge \Phi(\alpha, \beta)]$$

est un ensemble Π_1^1 d'après le théorème de Kleene.

Supposons que $C_1^\mathcal{T}$ contienne un fermé $\mathcal{T}$ -parfait P , et soit α_0 un code pour P . Alors la relation $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \in P \wedge \beta \in P \wedge \omega_1^\alpha < \omega_1^\beta$ est un pré-bon ordre $\Sigma_1^1(\alpha_0)$ sur P , et pour tout $\alpha \in P$ $\{ \beta \mid \beta < \alpha \} \subset \bigcup_{\gamma \in \Delta_1^1(\alpha)} F_\gamma$ est dans $\mathcal{T}_\sigma$, puisque $\{ \gamma, \gamma \in \Delta_1^1(\alpha) \}$ est dénombrable. D'après la Proposition 3.11, P est donc $\mathcal{T}$ -mince, ce qui est contradictoire. Donc $C_1^\mathcal{T}$ est $\mathcal{T}$ -mince et le théorème est démontré. $\square$

Les résultats qui précèdent sont établis moyennant l'axiome D. P. de détermination projective. Nous allons maintenant terminer cette section en établissant les résultats correspondants dans les modèles de Lévy-Solovay. Le fait que les résultats du §2 permettent de répondre à ce problème a été noté par K. Mc Aloon, dans le cas de l'idéal $\mathcal{T}_0$. Le résultat général s'en déduit facilement.

THÉORÈME 3.15. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $ZF + V = L$, Ω inaccessible dans $\mathcal{M}$, et $\mathcal{N}$ le modèle de Lévy construit au dessus de $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{T}$ un idéal de fermés paramétrés (avec une relation Φ qui est Π_1^0) de $\mathcal{N}$. $\mathcal{N} \models$ l'ensemble $C_2^\mathcal{T} = \{ \alpha, \exists \beta \in L \Phi(\alpha, \beta) \}$ est le plus grand ensemble définissable en termes d'ordinaux qui est élément de $\mathcal{T}_\sigma$.*

Par suite, comme $C_2^\mathcal{T}$ est un ensemble Σ_2^1 , $C_2^\mathcal{T}$ est le plus grand élément de $\Sigma_n^1 \cap \mathcal{T}_\sigma$, pour tout $n \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de revenir à la Démonstration 2.4: Nous y avons montré que si un ensemble A , définissable en termes d'ordinaux, n'est pas contenu dans $C_2^\mathcal{T}$, alors il contient un ensemble B analytique et qui n'est pas dans $\mathcal{T}_\sigma$ (on utilise évidemment $L^\mathcal{N} = \mathcal{N}$). Ceci montre que $C_2^\mathcal{T}$ contient tous les ensembles de $\mathcal{T}_\sigma$ définissables en termes d'ordinaux. Comme la relation $\beta \in L \cap \omega^\omega$ est Σ_2^1 , $C_2^\mathcal{T}$ est un ensemble Σ_2^1 . Enfin $C_2^\mathcal{T} \in \mathcal{T}_\sigma$ puisque $|\omega^\omega \cap L| = \aleph_0$ dans $\mathcal{N}$. $\square$

REMARQUES 3.16. (i) Un résultat analogue peut être obtenu en partant d'un modèle $\mathcal{N}'$ satisfaisant $V = L[O^*]$. Dans le modèle de Lévy correspondant, le plus grand élément de $\Sigma_2^1 \cap \mathcal{T}_\sigma$ est encore $C_2^\mathcal{T}$ (cf. Théorème 3.14(ii)), et pour tout $n \geq 3$, $C_n^\mathcal{T} = C_3^\mathcal{T} = \{ \alpha, \exists \beta \in L[O^*] \Phi(\alpha, \beta) \}$ est le plus grand

élément de $\Sigma_n^1 \cap \mathcal{T}_\sigma$. Il suffit de remarquer que la relation $\beta \in L[O^\#] \cap \omega^\omega$ est Σ_3^1 .

(ii) Le résultat du Théorème 3.15 est applicable, en particulier, à l'idéal $\mathcal{T}_1$ des fermés rares de ω^ω . Cependant la méthode de Kechris [4, Théorème 1. A-2] est également applicable pour cet idéal, ainsi que pour l'idéal $\mathcal{J}$ des ensembles de mesure de Lebesgue nulle qui ne vérifie pas les hypothèses du Théorème 3.15. En effet il est possible d'appliquer le Théorème 1.A-2 de [4], car lorsque $\mathcal{N} \models V = L$, alors dans $\mathcal{N}$ les classes Σ_n^1 , $n \geq 2$, sont normées. De plus la relation $\mathcal{N}_\mathcal{J}^n(\alpha) \leftrightarrow \omega^\omega - G(\alpha)$ est de mesure nulle, où G est un Σ_n^1 universel pour les sous-ensembles Σ_n^1 de ω^ω , est une relation Σ_n^1 (ceci peut-être démontré, par exemple, en utilisant le fait que chaque ensemble Σ_n^1 de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ est uniformisable, μ presque partout, par une fonction borélienne [13, Théorème 2]). Enfin l'analogue de la Proposition 3.11 est clair, puisque les ensembles Σ_n^1 ont la propriété de Baire dans $\mathcal{N}$. Donc il existe aussi dans $\mathcal{N}$, pour tout $n \geq 2$, un plus grand ensemble $C_n^\mathcal{J}$ qui est Σ_n^1 et de mesure nulle. Par contre nous ne savons pas si pour cet idéal $\mathcal{J}$ on a encore, pour $n \geq 2$, $C_n^\mathcal{J} = C_2^\mathcal{J}$.

(iii) L'idée d'introduire des jeux asymétriques où l'un des joueurs impose une règle à l'autre a été utilisée indépendamment par A. S. Kechris [6, §6] pour généraliser son travail sur les ensembles K_σ -bornés, mais de manière duale de la nôtre: Dans les jeux de Kechris, c'est le second joueur qui impose la règle au premier. Il est possible d'associer également un idéal de fermés à de tels jeux. Nous renvoyons le lecteur à l'article cité de Kechris pour plus de précisions concernant ces jeux.

Il ne semble pas qu'en toute généralité ces deux méthodes recouvrent les mêmes cas d'application. C'est cependant le cas pour certains idéaux particuliers—incluant l'idéal des fermés compacts—et dans ce cas il est possible de préciser la dualité. Supposons que la règle $\mathcal{R}$ soit du type particulier suivant: $\mathcal{Q}$ est une famille de parties de ω , et pour chaque $s \in \text{Seq } \omega$, $A \in \mathcal{Q}$, on considère l'arbre bien-fondé $R_{s,A} = \{t, t < s \vee t = s \frown n, n \in A\}$. Soit $\mathcal{R} = \{R_{s,A}, s \in \text{Seq } \omega, A \in \mathcal{Q}\}$ et $\mathcal{T}_\mathcal{R}$ l'idéal de fermés associé. Il est alors possible d'associer à l'idéal $\mathcal{T}_\mathcal{R}$ un jeu de Kechris, et la règle correspondante (pour le second joueur) est la famille duale $\mathcal{Q}^*$ de la famille $\mathcal{Q}$, définie par $\mathcal{Q}^* = \{X \subset \omega, \forall A \in \mathcal{Q} X \cap A \neq \emptyset\}$.

4. Applications.

A. *Le cas fondamental* $\mathcal{T}_0$. L'idéal $\mathcal{T}_0$ des fermés réduits à un point nous a servi de modèle tout au long de l'étude générale. La seule chose que nous n'avons pas encore vérifiée est que l'idéal $\mathcal{T}_0$ est de type bien fondé, donc qu'on peut lui appliquer les résultats du §3. Ceci va nous permettre de faire le lien entre les jeux introduits précédemment et les jeux G_2^* .

PROPOSITION 4.1. *L'idéal $\mathcal{T}_0$ est de type bien fondé. Plus précisément, si on définit pour chaque entier $n = \langle s, n_0, n_1 \rangle$ codant (récursivement) $s \in \text{Seq } \omega$, n_0 et $n_1 \in \omega$, $n_0 \neq n_1$,*

$$R_{\langle s, n_0, n_1 \rangle} = \{t \in \text{seq } \omega, t < s \vee t = s \frown n_0 \vee t = s \frown n_1\},$$

alors

$$\mathcal{R} = \{R_{\langle s, n_0, n_1 \rangle}, s \in \text{Seq } \omega, n_0, n_1 \in \omega\} \text{ est une règle pour } \mathfrak{T}_0.$$

La démonstration de ce fait est triviale. Il faut remarquer que la méthode classique consiste à étudier l'idéal $\mathfrak{T}_0$ sur 2^ω , pour lequel on a à sa disposition les jeux G_2^* , puis à en déduire les résultats sur ω^ω par plongement. Notre technique évite ce détour.

D'autre part si on restreint $\mathfrak{T}_0$ à $P = 2^\omega$, donc en utilisant la règle $\mathcal{R}' = \{R_{\langle s, 0, 1 \rangle}, s \in \text{seq } 2\}$, on peut vérifier directement que les jeux $G^{\mathfrak{T}_0}$ et G_2^* sont équivalents: Il suffit de remarquer qu'il est toujours possible, pour le joueur I, de jouer un entier $\langle s, 0, 1 \rangle$ un nombre (fini) suffisant de fois consécutivement pour que le joueur II soit obligé d'avoir construit $s \frown 0$ ou $s \frown 1$. Le résultat se déduit facilement de cette remarque.

La même remarque permet de rattacher l'étude des jeux G_ω^* à ce qui a été fait dans les sections précédentes:

B. Les jeux G_ω^* .

DÉFINITION 4.2. Un fermé F de ω^ω est dit *troué* si l'arbre T_F associé vérifie $\forall s \in T_F, \exists n s \frown n \notin T_F$. Nous noterons $\mathfrak{T}_2$ l'idéal des fermés troués.

Nous utilisons ici la terminologie introduite dans la note [9], dans laquelle les résultats qui suivent sont annoncés.

Dans cette note, les fermés $\mathfrak{T}_2$ -parfaits sont appelés hyperparfaits. Ce sont les fermés F tels que l'arbre T_F associé vérifie

$$\forall s \in T_F \exists s' \succ s \forall n s' \frown n \in T_F.$$

LEMME 4.3. (i) L'idéal $\mathfrak{T}_2$ est un idéal propre de type bien fondé de fermés de ω^ω . Plus précisément, en définissant, pour $s \in \text{Seq } \omega, R_s = \{t, t < s \vee t = s \frown n, n \in \omega\}$, alors $\mathcal{R} = \{R_s, s \in \text{Seq } \omega\}$ est une règle pour $\mathfrak{T}_2$.

(ii) Pour tout sous ensemble A de ω^ω , le jeu $G^{\mathfrak{T}_2}(A)$ est équivalent au jeu $G_\omega^*(A)$. Par suite, la détermination du jeu $G_\omega^*(A)$ équivaut à la $\mathfrak{T}_2$ -régularité de A .

DÉMONSTRATION. (i) Chaque R_s est bien fondé. Soit F un fermé troué. D'après la Définition 4.2, $\forall s \in T_F, R_s \not\subset T_F$. D'autre part si $\forall s R_s \not\subset T_F$, F est clairement troué.

(ii) Dans le jeu G_ω^* , I joue une suite s et II répond par un entier n à chaque coup. Ils construisent ainsi une suite $s \frown n$. Dans le jeu $G^{\mathfrak{T}_2}$, II semble avoir plus de possibilités: Quand I joue une suite s , II peut choisir dans R_s son jeu, donc jouer $s' \prec s$. Mais comme II doit jouer $s' \neq \emptyset$, I a la possibilité, en jouant successivement s un nombre fini ($\leq |s|$) de fois, d'obliger II à avoir construit $s \frown n$. Les deux jeux sont donc équivalents.

Nous pouvons donc appliquer le Théorème 3.6: La détermination du jeu $G_\omega^*(A)$ équivaut à la $\mathfrak{T}_2$ -régularité de A . $\square$

Ce lemme nous permet d'appliquer les résultats des sections précédentes que nous rassemblons dans le théorème suivant, qui répond en particulier au problème de D. Martin:

- THÉOREME 4.4. (i) $\text{Det}_\omega^*(\Sigma_1^1)$;
(ii) Si $\forall \alpha \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, alors $\text{Det}_\omega^*(\Sigma_2^1)$;
(iii) $\text{Det}(\Delta_{2n}^1) \rightarrow \text{Det}_\omega^*(\Sigma_{2n+1}^1)$;
(iv) Dans le modèle de Lévy-Solovay, AD_ω^* est vrai.

C. *Ensembles K_σ -bornés.* La notion d'ensemble K_σ -borné est due à Kechris (cf. [6], où elle est notée “ σ -boundedness”). Les résultats concernant cette notion sont dûs principalement à Kechris, et de façon indépendante, à Saint-Raymond [11] pour les résultats concernant les ensembles analytiques. Le résultat d'approximation dans le modèle de Lévy-Solovay et des applications à l'étude des filtres sur ω se trouvent dans [8].

Soit $\mathfrak{T}_3$ l'idéal des ensembles compacts de ω^ω . Un ensemble $A \subset \omega^\omega$ est dit K_σ -borné si A est contenu dans un ensemble K_σ de ω^ω , c'est-à-dire si $A \in (\mathfrak{T}_3)_\sigma$. Un fermé $\mathfrak{T}_3$ -parfait est appelé superparfait dans [6].

Soit $\leq$ la relation d'ordre sur ω^ω définie par $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \forall n \alpha(n) \leq \beta(n)$.

Il est facile de vérifier qu'un fermé F de ω^ω est compact si et seulement si il existe un élément α_0 de ω^ω qui majore, pour l'ordre $\leq$, tous les éléments de F . En d'autres termes la relation $\Pi_1^0 \leq$ paramétrise l'idéal $\mathfrak{T}_3$.

Il est d'autre part bien connu que tout compact de ω^ω est rare. Par suite, $\mathfrak{T}_3$ est un idéal de fermés propre et paramétré. Par contre, il est beaucoup moins aisé de voir que nous pouvons appliquer les résultats du §3.

Pour cela, identifions ω^ω avec le sous-ensemble $\Pi_2^0 A_0$ de 2^ω des fonctions de ω dans $\{0, 1\}$ prenant une infinité de fois la valeur 1, par l'application récursive θ qui à chaque $\alpha \in \omega^\omega$ associe $\theta(\alpha)$ définie par

$$\theta(\alpha)(n) = 1 \leftrightarrow \exists k \ n = \sum_{i < k} (\alpha(i) + 1) - 1.$$

A_0 est un G_δ du compact $P = 2^\omega$, et l'ensemble $P - A_0$ est dénombrable, et peut être aisément énuméré récursivement par $(\alpha_n)_{n \in \omega}$.

Notons toujours $\mathfrak{T}_3$ l'idéal des compacts de A_0 . Un fermé F de A_0 est compact si et seulement si il est fermé dans ω^ω , c'est-à-dire si et seulement si son adhérence $\bar{F}$ dans ω^ω ne rencontre pas $P - A_0$. Posons, pour tout $n \in \omega$, $R_n = T_{\{\alpha_n\}}$, et soit $\mathcal{R} = \{R_n, n \in \omega\}$. D'après ce qui précède,

(i) $\forall n [R_n] \cap A_0 = \emptyset$.

(ii) si F est fermé dans A_0 , alors $F \in \mathfrak{T}_3 \leftrightarrow \forall n R_n \not\subset F$.

Ceci exprime exactement (cf. Remarque 3.8) que l'idéal $\mathfrak{T}_3$ de fermés de A_0 est de type bien fondé avec règle $\mathcal{R}$.

Nous pouvons donc appliquer les résultats du §3, que nous résumons dans le théorème suivant:

THÉOREME 4.5. (i) (Kechris, Saint-Raymond). Tout ensemble analytique de ω^ω est $\mathfrak{T}_3$ -régulier (i.e. est K_σ -borné ou contient un superparfait).

(ii) (Kechris) Si $\forall \alpha \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}_3$ -régulier.

(iii) (Kechris) $\text{Det}(\Delta_{2n}^1) \rightarrow$ Tout Σ_{2n+1}^1 est $\mathfrak{T}_3$ -régulier.

(iv) (cf. [8]). Dans le modèle de Lévy-Solovay, tout sous ensemble de ω^ω est $\mathfrak{T}_3$ -régulier.

D. *Limites de la théorie générale.* La théorie générale que nous venons d'exposer semble indiquer une analogie très complète entre les différentes notions de petitesse liées à des idéaux de fermés de type bien fondé.

Nous allons terminer cet article en montrant les limites de cette analogie. Les résultats qui suivent sont a priori assez étonnant puisqu'ils vont montrer que la force des énoncés de $\mathfrak{T}$ -régularité peut beaucoup varier avec l'idéal $\mathfrak{T}$ envisagé: Plus précisément nous allons prouver que l'énoncé "tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}$ -régulier" est équiconsistante avec l'existence d'un cardinal inaccessible lorsque $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$ ou $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2$ tandis que sa consistance se déduit de celle de ZF lorsque $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_3$. Il s'agit donc là d'une différence tout à fait essentielle. En particulier, cela a donc un sens de poser le problème de la $\mathfrak{T}_3$ -régularité de tous les ensembles dans un modèle construit sans utiliser l'existence d'un cardinal inaccessible, comme pour la mesurabilité ou la propriété de Baire.

Rappelons tout d'abord un résultat de Solovay [12]:

THÉORÈME 4.6 (SOLOVAY). *Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'axiome H : $\forall \alpha \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$.*
- (ii) *Tout Π_1^1 est $\mathfrak{T}_0$ -régulier (i.e est dénombrable ou contient un parfait).*
- (iii) *Tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}_0$ -régulier.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) peuvent être déduites du Théorème 3.6(ii). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) se démontre en construisant dans $L[\alpha]$ un $\Pi_1^1(\alpha)$ indénombrable et ne contenant pas de parfait, et en utilisant des arguments d'absoluité.

On peut ajouter, à la liste précédente d'assertions équivalentes, les deux assertions suivantes:

- (iv) $\text{Det}_\omega^*(\Pi_1^1)$,
- (v) $\text{Det}_\omega^*(\Sigma_2^1)$.

Il suffit pour cela de remarquer que $H \rightarrow (v)$ est l'assertion (ii) du Théorème 4.4, et d'autre part que l'on a clairement $\text{Det}_\omega^*(\Pi_1^1) \rightarrow \text{Det}_2^*(\Pi_1^1)$.

Ceci montre la force de l'assertion "tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}$ -régulier", pour $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$ et $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2$: on ne peut pas démontrer leur consistance relativement à celle de ZF.

Le résultat est, comme nous l'avons dit, très différent dans le cas de l'idéal $\mathfrak{T}_3$: On a bien, d'après le Théorème 4.5(ii), l'implication $H \rightarrow$ tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}_3$ -régulier. D'autre part, il est facile de construire, dans L , un Π_1^1 non $\mathfrak{T}_3$ -régulier (il est même possible de construire un Π_1^1 $\mathfrak{T}_3$ -mince et cofinal à ω^ω pour l'ordre $<'$ défini par $\alpha <'\beta \leftrightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 \alpha(n) < \beta(n)$). Cependant, les considérations d'absoluité ne donnent rien, et on a par contre le résultat suivant, qui montre que $\text{Cons}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Cons}(\text{ZF} + \text{AC} + \text{tout } \Sigma_2^1 \text{ est } \mathfrak{T}_3\text{-régulier})$.

THÉORÈME 4.7. *Supposons $MA(\aleph_1)$. Le σ -idéal $(\mathfrak{T}_3)_\sigma$ est $\aleph_1$ -additif (i.e. toute union de $\aleph_1$ ensembles de $(\mathfrak{T}_3)_\sigma$ est dans $(\mathfrak{T}_3)_\sigma$). En particulier, tout ensemble Σ_2^1 est $\mathfrak{T}_3$ -régulier.*

DÉMONSTRATION. La démonstration repose sur la conséquence suivante de $MA(\aleph_1)$:

(*) Tout sous-ensemble de cardinalité $\aleph_1$ de ω^ω est majoré pour l'ordre $\leq'$. Admettons ce résultat. Si $A = \bigcup_{\xi < \aleph_1} A_\xi$, où chaque A_ξ est élément de $(\mathfrak{T}_3)_\sigma$, définissons $\beta_\xi \in \omega^\omega$ tel que $\forall \alpha \in A_\xi, \alpha \leq' \beta_\xi$ (un tel β_ξ est facile à trouver: chaque A_ξ est dans $(\mathfrak{T}_3)_\sigma$, donc il existe une suite $(\beta_n)_{n \in \omega}$ telle que $\forall \alpha \in A_\xi, \exists n \alpha \leq \beta_n$. On prend alors $\beta_\xi(n) = \sup_{m < n} \beta_m(n)$). Par suite il existe β telle que $\forall \alpha \in A, \alpha \leq' \beta$. Mais ceci implique clairement que A est contenu dans un K_σ de ω^ω . La démonstration de (*) utilise une technique tout à fait classique: Soit A de cardinalité $\aleph_1$, $A \subset \omega^\omega$. On définit un ensemble ordonné $(P, <_P)$ de la manière suivante: une condition p de P est un couple formé d'une suite finie d'entiers et d'un sous-ensemble fini I de A . On définit $(s, I) <_P (s', I')$ par $I' \subset I, s' < s$, et $\forall n \in \text{dom } s - \text{dom } s', \forall \alpha \in I', s(n) > \alpha(n)$. P a la condition d'antichaine dénombrable puisque si (s, I) et (s', I') sont incompatibles, nécessairement $s \neq s'$. Définissons, pour $n \in \omega, D_n = \{(s, I) \in P, n \in \text{dom } s\}$, et $D_\alpha = \{(s, I), \alpha \in I\}$ pour $\alpha \in A$. L'ensemble $\mathcal{D} = \{D_n, n \in \omega\} \cup \{D_\alpha, \alpha \in A\}$ est de cardinalité $\aleph_1$, et tous ses éléments sont denses. Soit alors $G \mathcal{D}$ -générique sur P . $\alpha_0 = UG$ est une fonction de ω dans ω , puisque G rencontre chaque D_n , et pour chaque $\alpha \in A$, puisque G rencontre D_α , il existe $(s, I) \in G$ tel que $\alpha \in I$, donc $\forall n \geq |s|, \alpha(n) \leq \alpha_0(n)$. (*) est démontré.

Enfin pour démontrer que tout Σ_2^1 est $\mathfrak{T}_3$ -régulier, on peut soit utiliser le fait que tout $\Sigma_2^1 A$ est union de $\aleph_1$ boréliens, donc que si A ne contient aucun $\mathfrak{T}_3$ -parfait, ces boréliens sont $\mathfrak{T}_3$ -minces, donc dans $(\mathfrak{T}_3)_\sigma$, et utiliser ce qui précède, ou bien utiliser le Théorème 4.5(ii), en remarquant que $\forall \alpha \text{ card}(\omega^\omega \cap L[\alpha]) \leq \aleph_1$, et ce qui précède. $\square$

Problème 4.8. Nous venons de voir que la $\mathfrak{T}_0$ -régularité des ensembles Σ_2^1 est équivalente à l'axiome H, donc implique la $\mathfrak{T}$ -régularité des Σ_2^1 pour tout idéal $\mathfrak{T}$ de type bien fondé.

En est-il de même lorsqu'on remplace Σ_2^1 par un autre classe "raisonnable" de sous-ensembles de ω^ω ? En particulier pour $\mathcal{P}(\omega^\omega)$?

Plus généralement, peut-on trouver, pour une classe raisonnable Γ , un idéal $\mathfrak{T}$ de fermés de type bien fondé tel que la $\mathfrak{T}$ -régularité des ensembles de Γ implique la $\mathfrak{T}'$ -régularité de ces ensembles, pour tout autre $\mathfrak{T}'$ de type bien fondé?

Nous ne savons même pas si AD_2^* équivaut à AD_ω^* . (Nous pouvons juste affirmer, d'après ce qui précède, que ces énoncés sont tous deux équivalents avec l'existence d'un cardinal inaccessible.)

REFERENCES

1. M. Davis, *Infinite games with perfect information*, Advances in game theory, Ann. of Math. Studies no. 52, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1964, pp. 85–101.
2. C. Dellacherie, *Capacités et processus stochastiques*, Ergebnisse der Math. Wissenschaften, Band 67, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
3. A. S. Kechris, *Measure and category in effective descriptive set theory*, Ann. Math. Logic 5 (1973), 337–384.

4. ———, *The theory of countable analytical sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **202** (1975), 259–299.
5. ———, *Descriptive set theory*, cours manuscrit en circulation.
6. ———, *On a notion of smallness for subsets of the Baire space*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 191–207.
7. E. M. Kleinberg, *Infinitary combinatorics*, Cambridge Summer School in Math. Logic 1971, Lecture Notes in Math., vol. 337, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
8. A. Louveau, *Ensembles K_σ -bornés et filtres sur ω* , Colloq. Internat. du C.N.R.S. (Paris) **249** (1978), 147–155.
9. ———, *Détermination des jeux du type G_ω^** , Note aux C. R. Acad. Sci. (Paris), Déc. 1975.
10. Y. Moschovakis, *Descriptive set theory*, North-Holland, Amsterdam (to appear).
11. J. Saint-Raymond, *Un théorème d'approximation par l'intérieur*, Note aux C. R. Acad. Sci. (Paris), Juin, 1975.
12. R. M. Solovay, *On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals*, Foundations of Math. (Sympos. Commemorating the 60th birthday of K. Gödel, Columbus, Ohio, 1966), Springer, New York, 1966, pp. 58–73.
13. ———, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 1–56.

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS VI, 4 PLACE JUSSIEU, 75230 PARIS, FRANCE