TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 276, Number 2, April 1983

PRIMARITÉ DE $L^p(X)$

BY

MICHÈLE CAPON

RESUME. Soit X un espace de Banach à base symétrique. Nous étudions les opérateurs de $L^p(X)$ dans lui-même, en leur associant une "matrice" d'opérateurs de L^p. Cette technique nous permet de démontrer que pour tout p réel dans $[1, +\infty[$, l'espace $L^p(X)$ est primaire.

Introduction. Dans cet article nous allons étudier la primarité de $L^p(X)$ où X est un espace de Banach muni d'une base symétrique.

Le résultat essentiel sera de montrer que l'espace $L^p(X)$ est primaire et la démonstration se divise en deux cas bien distincts suivant que X possède ou ne possède pas une certaine propriété $\mathcal{P}_p$ (que nous définirons ultérieurement). La démonstration dans le second cas utilise effectivement la négation de $\mathcal{P}_p$ et ne permet pas d'éviter l'étude du premier cas.

Dans la suite p désigne un nombre réel, $1 \leqslant p < \infty$ et L^p désigne l'espace $L^p([01], P)$ où P est la mesure de Lebesgue sur [01]. X désigne un espace de Banach muni d'une base symétrique $(e_i)_{i \geqslant 1}$ et de la norme symétrique associée, [**4**].

Si A est un ensemble mesurable de [01] nous posons $X(A) = \{h = \mathbf{1}_{A_1} - \mathbf{1}_{A_2};$ $\{A_1, A_2\}$ est une partition mesurable de A avec $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}P(A)\}$.

Dans la première partie nous allons introduire une technique qui permet d'associer à chaque opérateur T de $L^p(X)$ dans lui-même une matrice $(k_{ij})_{i \geqslant 1, j \geqslant 1}$ dont les éléments sont dans L^∞.

Dans la seconde partie nous introduisons la propriété $\mathcal{P}_p$ et nous démontrons que, si X possède $\mathcal{P}_p$ et n'est pas isomorphe à c_0 ou l_1, alors $L^p(X)$ est primaire. La troisième partie est consacrée à l'étude de $L^p(c_0)$ et $L^p(l_1)$.

Dans la quatrième partie nous montrons finalement que $L^p(X)$ est primaire lorsque X ne possède pas la propriété $\mathcal{P}_p$.

I. Construction d'une famille de mesures associées à un opérateur T de $L^p(X)$. Nous allons voir comment associer une famille de mesures à une suite d'opérateurs (S_n) de L^p et une suite (δ_n) de nombres positifs.

Dans toute la suite l'ensemble $X(A)$ défini précédemment sera toujours muni de la topologie $\sigma(L^\infty L^1)$.

PROPOSITION I.1. *Soit (δ_n) une suite de nombres positifs et (S_n) une suite d'opérateurs de L^p, il existe une suite de mesures θ_n, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue P, et pour chaque ensemble mesurable A il existe une suite décroissant*

Received by the editors May 7, 1980 and, in revised form, November 5, 1981.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46B99.

©1983 American Mathematical Society
0002-9947/82/0000-0953/$11.50

$X_n(A)$ de parties de $X(A)$ telle que:

$$h \in X_n(A) \Rightarrow |\langle S_i h, h\rangle - \theta_i(A)| < \delta_i P(A)^3 \qquad \forall i \leqslant n.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons esquisser la construction de θ_1, qui suit exactement la même méthode qu'Enflo [5].

On pose

$$\tilde{\theta}_1(A) = \limsup_{\substack{h \in X(A) \\ h \to 0}} \langle S_1 h, h\rangle,$$

P étant sans atomes, 0 est adhérent à $X(A)$ $\tilde{\theta}_1$, a donc un sens et on a

$$|\tilde{\theta}_1(A)| \leqslant \|S_1\| P(A).$$

On démontre ensuite que si les $(A_i)_{i \leqslant n}$ sont disjoints on a

$$\tilde{\theta}_1(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \tilde{\theta}_1(A_i).$$

Nous allons seulement rappeler les étapes de la démonstration qui est faite dans [5].

LEMME I.2. *Pour tout h fixé dans L^∞ on a*

$$\limsup_{\substack{k \to 0 \\ k \in X(A)}} \langle S_1(h+k), h+k\rangle = \langle S_1 h, h\rangle + \tilde{\theta}_1(A).$$

Ceci se voit aisément en remarquant que

$$\lim_{k \to 0} \langle S_1 h, k\rangle + \langle S_1 k, h\rangle = 0.$$

COROLLAIRE I.3. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mesurables alors $\sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_1(A_i)$ est une valeur d'adhérence de $\{\langle S_1(\sum_{i=1}^n h_i), \sum_{i=1}^n h_i\rangle;\ h_i \in X(A_i)$ et $h_i \to 0\}$.*

En effet, d'après le lemme précédent,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\theta}_1(A_i) = \limsup_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \in X(A_n)}} \left(\limsup_{\substack{h_{n-1} \to 0 \\ h_{n-1} \in X(A_{n-1})}} \left(\ldots \limsup_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_1 \in X(A_1)}} \left\langle S_1\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right), \sum_{i=1}^{n} h_i \right\rangle \right) \ldots \right).$$

Cette formule démontre bien le corollaire.

LEMME I.4. *Si A_1 et A_2 sont mesurables et disjoints, $\tilde{\theta}_1(A_1 \cup A_2) \geqslant \tilde{\theta}_1(A_1) + \tilde{\theta}_1(A_2)$.*

En effet pour h_1 dans $X(A_1)$ et h_2 dans $X(A_2)$, alors $(h_1 + h_2)$ est dans $X(A_1 \cup A_2)$ donc

$$\langle S_1(h_1 + h_2), h_1 + h_2\rangle \leqslant \tilde{\theta}_1(A_1 \cup A_2).$$

Or $\tilde{\theta}_1(A_1) + \tilde{\theta}_1(A_2)$ est une valeur d'adhérence du premier membre donc le lemme est démontré.

Nous pourrons maintenant poser

$$\theta_1(A) = \inf_{\pi} \sum_{A_i \in \pi} \tilde{\theta}_1(A_i).$$

La borne inférieure étant prise sur toutes les partitions mesurables de A. Le lemme I.4 permet de voir que θ_1 est une mesure et en outre on a $|\theta_1(A)| \leqslant \|S_1\| P(A)$.

D'autre part nous allons établir une propriété importante qui nous permettra de construire θ_2.

LEMME I.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout voisinage V de 0 dans L^∞, il existe h dans $X(A) \cap V$ tel que $|\theta_1(A) - \langle S_1 h, h\rangle| < \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. On commence par choisir une partition $(A_1, \ldots, A_n)$ de A telle que $|\theta_1(A) - \Sigma_{i=1}^n \tilde{\theta}_1(A_i)| < \varepsilon/2$.

En appliquant Corollaire I.3, on trouve facilement des éléments h_i dans $X(A_i)$ tels que $h = \Sigma_{i=1}^n h_i$ soit dans V et

$$\left|\langle S_1 h, h\rangle - \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_1(A_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|\langle S_1 h, h\rangle - \theta_1(A)| < \varepsilon$. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant définir, pour tout A, l'ensemble $X_1(A)$

$$X_1(A) = \left\{h \in X(A); |\langle S_1 h, h\rangle - \theta_1(A)| < \delta_1 P(A)^3\right\}.$$

Le lemme précédent montre que 0 est adhérent à $X_1(A)$.

Posons $\tilde{\theta}_2(A) = \limsup_{h \to 0, h \in X_1(A)} \langle S_1 h, h\rangle$.

La démonstration du Corollaire I.3 n'utilise qu'une seule propriété de $X(A)$ c'est le fait que 0 est adhérent à $X(A)$. Il reste donc vrai que $\Sigma_{i=1}^n \tilde{\theta}_2(A)$ est une valeur d'adhérence de $\{\langle S_2(\Sigma_{i=1}^n h_i), \Sigma_{i=1}^n h_i\rangle;\ h_i \in X_1(A_i),\ h_i \to 0\}$.

LEMME I.6. *Soit (A_1, A_2) une partition mesurable de A et h_1 dans $X_1(A_1)$ il existe un voisinage V de 0 dans L^∞ tel que si h_2 est dans $V \cap X_1(A_2)$, $h_1 + h_2$ est dans $X_1(A)$.*

DÉMONSTRATION. Comme h_1 est dans $X_1(A_1)$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $|\langle S_1 h_1, h_1\rangle - \theta_1(A_1)| < \delta_1 P(A_1)^3 - \varepsilon$.

Soit $V = \{k \in L^\infty; |\langle S_1 k, h_1\rangle| + |\langle S_1 k, h_1\rangle| < \varepsilon\}$.

Si h_2 est dans $V \cap X_1(A_2)$ on a alors

$$|\langle S_1(h_1 + h_2), h_1 + h_2\rangle - \theta_1(A_1) - \theta_1(A_2)| < \delta_1 P(A_1)^3 + \delta_1 P(A_2)^3,$$

$$|\langle S_1(h_1 + h_2), h_1 + h_2\rangle - \theta_1(A)| < \delta_1 P(A)^3. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE I.7. *$\tilde{\theta}_2(A_1 \cup A_2) \geqslant \tilde{\theta}_2(A_1) + \tilde{\theta}_2(A_2)$, si A_1 et A_2 sont disjoints.*

On choisit, pour $\varepsilon > 0$ fixé, un h_1 dans $X_1(A_1)$ avec

$$|\langle S_2 h_1, h_1\rangle - \tilde{\theta}_2(A_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le lemme précédent nous donne un voisinage V de 0 dans $X_1(A_2)$. On choisit alors h_2 dans V tel que $|\langle S_2 h_2, h_2\rangle - \tilde{\theta}_2(A_2)| < \varepsilon/3$ et on impose en outre $|\langle S_2 h_1, h_2\rangle| + |\langle S_2 h_2, h_1\rangle| < \varepsilon/3$, ce qui est possible par définition de $\tilde{\theta}_2$. On a alors d'une part, $h_1 + h_2$ étant dans $X_1(A_1 \cup A_2)$,

$$\langle S_2(h_1 + h_2), h_1 + h_2\rangle \leqslant \tilde{\theta}_2(A_1 \cup A_2).$$

D'autre part $\tilde{\theta}_2(A_1) + \tilde{\theta}_2(A_2) < \langle S_2 h_1, h_1\rangle + \langle S_2 h_2, h_2\rangle + 2\varepsilon/3$,

$$\tilde{\theta}_2(A_1) + \tilde{\theta}_2(A_2) < \langle S_2(h_1 + h_2), h_1 + h_2\rangle + \varepsilon.$$

Donc

$$\tilde{\theta}_2(A_1) + \tilde{\theta}_2(A_2) < \tilde{\theta}_2(A_1 \cup A_2) + \varepsilon,$$

ε étant arbitraire le corollaire est démontré. C.Q.F.D.

Nous poserons alors $\theta_2(A) = \inf_\pi \Sigma_{A_i \in \pi} \tilde{\theta}_2(A_i)$, la borne inférieure étant prise sur toutes les partitions mesurables de A.

θ_2 est une mesure et $|\theta_2(A)| \leqslant \|S_2\| P(A)$.

D'autre part on a

LEMME I.8. *Pour tout voisinage V de 0 dans L^∞, et tout $\varepsilon > 0$, il existe h dans $X_1(A) \cap V$ tel que $|\langle S_2 h, h\rangle - \theta_2(A)| < \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. Cn choisit une partition mesurable $(A_1, \ldots, A_n)$ de A telle que

$$\left|\theta_2(A) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\theta}_2(A_i)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En utilisant Lemme I.6, on choisit successivement $h_1, \ldots, h_n$ tels que h_i soit dans $X_1(A_i)$, $\Sigma_{i=1}^n h_i$ soit dans $V \cap X_1(A)$ et en outre

$$|\langle S_2 h_i, h_i\rangle - \tilde{\theta}_2(A_i)| < \frac{\varepsilon}{3n}$$

et aussi $\Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j \neq i} |\langle S_2 h_i, h_j\rangle| < \varepsilon/3$. Cette dernière inégalité est toujours réalisable car il suffit de choisir les h_i suffisamment proches de 0 dans $X(A_i)$. Soit $h = \Sigma_{i=1}^n h_i$, un calcul facile donne

$$\langle S_2 h, h\rangle - \theta_2(A)| < \varepsilon. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Si nous posons $X_2(A) = \{h \in X_1(A); |\langle S_2 h, h\rangle - \theta_2(A)| < \delta_2 P(A)^3\}$.

On vient de montrer que 0 est adhérent à $X_2(A)$.

En procédant par récurrence nous pouvons définir une suite θ_n de mesures, et, pour chaque A, une suite décroissante $X_n(A)$ telles que

(α) $h \in X_n(A) \Rightarrow |\langle S_i h, h\rangle - \theta_i(A)| < \delta_i P(A)^3 \, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

(β) $|\theta_n(A)| \leqslant \|S_n\| P(A)$.

(γ) 0 est adhérent à chaque $X_n(A)$.

Ceci achève la proposition I.1.

Introduisons maintenant un espace de Banach X, ayant une base symétrique $(e_i)_{i \geqslant 1}$. Notons $(e_i^*)_{i \geqslant 1}$ la suite biorthogonale dans le dual X^* et $L^p(X)$ l'espace des fonctions vectorielles mesurables de [0, 1] dans X de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable

$$L^p(X) = \left\{ f = \sum_n f_n e_n;\ f_n \in L^p \text{ et } \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n \right\|_X \in L^p \right\}.$$

Désignons par U_j l'isométrie de L^p dans $L^p(X)$ définie par

$$U_j(f) = f e_j$$

et par Q_i la projection de $L^p(X)$ dans L^p définie par

$$Q_i\left(\sum_n f_n e_n\right) = f_i.$$

Si T est un opérateur de $L^p(X)$ posons $T_{ij} = Q_i \circ T \circ U_j$.

PROPOSITION I.9. *Soit T un opérateur de $L^p(X)$ dans lui-même et (δ_{ij}) une famille de nombres positifs. On peut construire des mesures $\theta_{ij} = k_{ij}P$, et $\theta'_{ij} = k'_{ij}P$, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue P et telles que*

(1) $\theta_{ij} = \theta'_{ij}$ *pour* $i \neq j$.

(2) $|k'_{ii} + k_{ii} - 1| \leqslant 2\delta_{ii}$ *pour tout* i, *presque surement.*

(3) $|k'_{ii}| \leqslant \|I - T\|$ *et* $|k_{ii}| \leqslant \|T\|$.

(4) *Pour tout ensemble mesurable A et tout entier n on peut trouver h dans $X(A)$ telle que*

$$|\theta_{ij}(A) - \langle T_{ij}h, h\rangle| < \delta_{ij}P(A)^3 \qquad \forall i \leqslant n, \forall j \leqslant n,$$

$$|\theta'_{ij}(A) - \langle (I - T)_{ij}h, h\rangle| < \delta_{ij}P(A)^3 \qquad \forall i \leqslant n, \forall j \leqslant n.$$

DÉMONSTRATION. Posons $T'_{ij} = (I - T)_{ij}$. On remarque que si $i \neq j$ alors $T'_{ij} = -T_{ij}$. On écrit alors une suite d'opérateurs:

$$\underbrace{T_{11}, T'_{11}}, T_{21}, T_{12}, T_{31}, \underbrace{T_{22}, T'_{22}}, T_{13}, \text{etc.....}$$

C'est-à-dire la suite (T_{ij}) ordonnée suivant l'ordre de Cantor, mais oú chaque terme diagonal se décompose en deux. On ordonne de la même façon la suite (δ_{ij}) en doublant chaque terme diagonal:

$$\underbrace{\delta_{11}, \delta_{11}}, \delta_{21}, \delta_{12}, \delta_{31}, \underbrace{\delta_{22}, \delta_{22}}, \delta_{13}, \ldots.$$

En appliquant la proposition I.1 on définit des mesures θ_{ij} et θ'_{ii}. Posons alors $\theta'_{ij} = -\theta_{ij}$ si $i \neq j$. La condition (1) est réalisée. En utilisant les propriétés (α) et (β) ci-dessus on en déduit facilement (3) et (4). (2) est une conséquence de (4) en effet, i étant fixé on peut choisir h dans $X(A)$ telle que

$$|\theta_{ii}(A) - \langle T_{ii}h, h\rangle| < \delta_{ii}P(A)^3 \leqslant \delta_{ii}P(A)$$

et

$$|\theta'_{ii}(A) - \langle (I - T)_{ii}, h\rangle| < \delta_{ii}P(A)$$

donc $|\theta'_{ii}(A) - P(A) + \langle T_{ii}h, h\rangle| < \delta_{ii}P(A)$, car $\langle h, h\rangle = P(A)$. On en déduit

$$|\theta_{ii}(A) + \theta'_{ii}(A) - P(A)| \leqslant 2\delta_{ii}P(A).$$

Ceci étant vrai pour tout A measurable on en déduit

$$|k_{ii} + k'_{ii} - 1| \leqslant 2\delta_{ii} \quad \text{ps.} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Dans la suite la matrice (k_{ij}) associée à un opérateur T de $L^p(X)$ et aux nombres δ_{ij} désignera toujours la matrice (k_{ij}) donnée par la proposition I.9. Nous allons maintenant étudier le comportement des fonctions k_{ij}.

PROPOSITION I.10. *Soit T un opérateur de norme* 1 *de $L^p(X)$ et (δ_{ij}) une famille de nombres positifs tels que $\Sigma_{i,j}\delta_{ij} \leqslant \delta$. Désignons par (k_{ij}) la matrice associée à l'opérateur T et aux nombres (δ_{ij}). On a alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} k_{ij} e_i \right\|_X \leqslant 1 + \delta \text{ ps}, \quad \textit{pour tout } j \textit{ et tout } N,$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} k_{ij} e_j^* \right\|_{X^*} \leqslant 1 + \delta \text{ ps}, \quad \textit{pour tout } i \textit{ et tout } N.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la proposition I.9 on peut choisir, pour tout ensemble mesurable A, un élément h de $X(A)$ tel que

$$|\langle T_{ij}h, h\rangle - \theta_{ij}(A)| \leqslant \delta_{ij}P(A)^3 \leqslant \delta_{ij}P(A) \qquad \forall i \leqslant N, \forall j \leqslant N.$$

On a donc

$$\left\| \left\langle \sum_{i=1}^{N} T_{ij}he_i, h \right\rangle - \sum_{i=1}^{N} \theta_{ij}(A)e_i \right\|_X \leqslant \delta P(A).$$

Mais on a

$$\left\| \left\langle \sum_{i=1}^{N} T_{ij}he_i, h \right\rangle \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{N} T_{ij}(h)e_i \right\|_{L^p(X)} \|h\|_q.$$

Comme

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} T_{ij}(h)e_i \right\|_{L^p(X)} \leqslant \|T \circ U_j(h)\|_{L^p(X)} \leqslant \|h\|_p$$

et aussi $\|h\|_p\|h\|_q = (P(A))^{1/p}(P(A))^{1/q} = P(A)$. On en déduit $\|\Sigma_{i=1}^N \theta_{ij}(A)e_i\|_X \leqslant (1+\delta)P(A)$. Considérons la mesure vectorielle μ à valeur dans l'espace X_N engendré par $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ et définie par

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{N} \theta_{ij}(A)e_i.$$

On vient de voir que $\|\mu(A)\| \leqslant (1+\delta)P(A)$. Ceci montre que la dérivée de μ est majorée presque surement par $(1+\delta)$ donc

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} k_{ij}e_i \right\|_X \leqslant 1 + \delta \quad \text{ps}.$$

Pour la seconde partie nous introduirons l'opérateur S de $L^p(X_N)$ dans L^p défini par

$$S\left(\sum_{j=1}^{N} f_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{N} T_{ij}(f_j).$$

Donc S est la restriction à $L^p(X_N)$ de $Q_i \circ T$. On a $\|S\| \leqslant 1$. Un calcul facile permet de voir que S^* est l'opérateur de L^q dans $L^q(X_N^*)$ (car X_N est de dimension finie),

défini par

$$S^*(h) = \sum_{j=1}^{N} T_{ij}^*(h)\tilde{e}_j^* \quad \text{où } \tilde{e}_j^* = e_{j|X_N}^*.$$

On a donc, comme $\|S^*\| \leqslant 1$, $\|\Sigma_{j=1}^N T_{ij}^*(h)\tilde{e}_j^*\|_{L^q(X_N^*)} \leqslant \|h\|_q$.

On démontre alors exactement comme ci-dessus que

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} \theta_{ij}(A)\tilde{e}_j^* \right\|_{X_N^*} \leqslant (1+\delta)P(A).$$

Mais comme il existe une projection de norme 1 de X sur X_N, il est facile de voir que

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} \theta_{ij}(A)e_j^* \right\|_{X^*} = \left\| \sum_{j=1}^{N} \theta_{ij}(A)\tilde{e}_j^* \right\|_{X_N^*}.$$

On termine alors la démonstration comme ci-dessus. C.Q.F.D.

COROLLAIRE I.11. *Si X n'est pas isomorphe à c_0, pour tout j fixé, la suite $(k_{ij})_{i\geqslant 1}$ tend vers* 0 *en probabilité.*

Si X n'est pas isomorphe à l_1, pour tout i fixé, la suite $(k_{ij})_{j\geqslant 1}$ tend vers 0 *en probabilité.*

DÉMONSTRATION. Supposons au contraire que pour un certain j fixé, il existe $\delta > 0$ tel que

$$P\big(\{t; |k_{ij}(t)| > \delta\}\big) > \delta \quad \text{pour } i \in I, \text{ partie infinie de } N.$$

On a donc $\int |k_{ij}(t)|\, dt \geqslant \delta^2$ pour $i \in I$.

La base (e_i) étant inconditionnelle de constante 1 on déduit de la proposition

$$\left\| \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^{N} |k_{ij}|\, e_i \right\|_X \leqslant 1+\delta \quad \text{ps pour tout } N.$$

Par conséquent

$$\left\| \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^{N} \int |k_{ij}(t)|\, dt\, e_i \right\|_X \leqslant \int \left\| \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^{N} |k_{ij}(t)|\, e_i \right\|_X dt \leqslant 1+\delta.$$

L'inconditionnalité nous permet à nouveau de minorer le premier terme

$$\delta^2 \left\| \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^{N} e_i \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^{N} \int |k_{ij}|\, e_i \right\|_X \leqslant 1+\delta.$$

La base étant symétrique et I une partie infinie, on en déduit

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} e_i \right\|_X \leqslant \frac{1+\delta}{\delta^2} \qquad \forall N.$$

En utilisant à nouveau l'inconditionnalité on en déduit facilement que la base serait équivalente à la base canonique de c_0, ce qui est impossible dans la première

hypothèse. On a donc montré la première partie. Pour la seconde partie on montre de même qui si pour un certain i fixé, la suite $(k_{ij})_{j\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 en probabilité, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ et une partie infinie I de N telle que

$$\left\| \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^{N} e_i^* \right\|_{X^*} \leqslant \frac{1+\delta}{\delta^2} = C, \qquad \forall N.$$

Nous allons en déduire que las base (e_i) est équivalente, à la base canonique de l_1. En effet soit n un entier et $(j(1), j(2), \ldots, j(n))$ les n premiers termes de I

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{j(k)} \right\| \geqslant \sup_{\|\Sigma_{k=1}^n \mu_k e_{j(k)}^*\| \leqslant 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k \right|.$$

Or si $|\mu_k| \leqslant \frac{1}{C}$ on a $\|\Sigma_{k=1}^n \mu_k e_{j(k)}^*\| \leqslant \frac{1}{C}\|\Sigma_{k=1}^n e_{j(k)}^*\| \leqslant 1$ donc

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|_X \geqslant \sup_{|\mu_k| \leqslant 1/C} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k \right| = \frac{1}{C}\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \right).$$

La suite (e_i) serait donc équivalente à la base canonique de l_1, ce qui est impossible dans la seconde hypothèse.

II. Etude de la primarité de $L^p(X)$. Dans ce paragraphe nous allons introduire une condition $\mathcal{P}_p$ pour l'espace X possèdant une base symétrique $(e_i)_{i\geqslant 1}$. Nous verrons ensuite les conséquences de la propriété pour l'espace $L^p(X)$.

Soit $\mathcal{B}_n$ la σ-algèbre sur [01] engendrée par les n premières fonctions de Haar et $E^{\mathcal{B}_n}$, l'espérance conditionnelle suivant $\mathcal{B}_n$.

DEFINITION. *Soit $1 \leqslant p < \infty$, X un Banach muni d'une base symétrique (e_i), nous dirons que X possède la propriété $\mathcal{P}_p$ si il existe une constante K telle que pour toute suite finie $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de L^p on ait*

$$\left\| \sum_n \left(E^{\mathcal{B}_n} f_n\right) e_n \right\|_{L^p(X)} \leqslant K \left\| \sum_n f_n e_n \right\|_{L^p(X)}.$$

Cette condition exprime que l'espace engendré par les $(h_i \otimes e_n)_{n\geqslant 1, i\leqslant n}$ est complémenté dans $L^p(X)$. Désignons Q, Q_1 et Q_2 les projections de $L^p(X)$ définies par

$$Q\left(\sum_n f_n e_n\right) = \sum_n \left(E^{\mathcal{B}_n} f_n\right) e_n,$$

$$Q_1\left(\sum_n f_n e_n\right) = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(E^{\mathcal{B}_{2^k}} f_j\right) e_j,$$

$$Q_2\left(\sum_n f_n e_n\right) = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(E^{\mathcal{B}_{2^{k+1}}} f_j\right) e_j.$$

La propriété $\mathcal{P}_p$ affirme que Q est continue. Nous allons voir qu'il en est de même de Q_1 et Q_2.

PROPOSITION II.1. *Si Q est continue alors Q_1 et Q_2 sont également continues.*

DÉMONSTRATION. Montrons par example que Q_1 est continue.

Soit f un élément de L^p et $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ et soit A un atome de $\mathfrak{B}_n$.

Si A est un atome de $\mathfrak{B}_{2^k}$ alors $E^{\mathfrak{B}_n}f$ et $E^{\mathfrak{B}_{2^k}}f$ coïncident sur A. Si A n'est pas un atome de $\mathfrak{B}_{2^k}$, alors $A = A' \cup A''$ où A' et A'' sont deux atomes de $\mathfrak{B}_{2^k}$, $P(A') = P(A'') = \frac{1}{2}P(A)$. On a alors

$$(E^{\mathfrak{B}_n}f)\mathbf{1}_A = \frac{\int_A f}{P(A)}\mathbf{1}_A = \frac{\int_{A'} f + \int_{A''} f}{P(A)}(\mathbf{1}_{A'} + \mathbf{1}_{A''}),$$

$$(E^{\mathfrak{B}_{2^k}}f)\mathbf{1}_A = \frac{\int_{A'} f}{P(A')}\mathbf{1}_{A'} + \frac{\int_{A''} f}{P(A'')}\mathbf{1}_{A''} = \frac{2\int_{A'} f}{P(A)}\mathbf{1}_{A'} + \frac{2\int_{A''} f}{P(A)}\mathbf{1}_{A''},$$

$$(E^{\mathfrak{B}_{2^k}} - E^{\mathfrak{B}_n})(f)\mathbf{1}_A = \frac{\int_{A'} f - \int_{A''} f}{P(A)}\mathbf{1}_{A'} + \frac{\int_{A''} f - \int_{A'} f}{P(A)}\mathbf{1}_{A'},$$

$$|(E^{\mathfrak{B}_{2^k}} - E^{\mathfrak{B}_n})(f)|\mathbf{1}_A = \frac{|\int_{A'} f - \int_{A''} f|}{P(A)}\mathbf{1}_A.$$

Posons

$$g\mathbf{1}_A = \begin{cases} f(\mathbf{1}_{A'} - \mathbf{1}_{A''}) & \text{si } \int_{A'} f - \int_{A''} f \geqslant 0, \\ f(\mathbf{1}_{A''} - \mathbf{1}_{A'}) & \text{si } \int_{A'} f - \int_{A''} f < 0, \\ 0 & \text{si } A \text{ est un atome de } \mathfrak{B}_{2^k}, \end{cases}$$

$g = \Sigma_{A \in \mathfrak{B}_n} g\mathbf{1}_A$, $|g| \leqslant |f|$ et

$$|(E^{\mathfrak{B}_{2^k}} - E^{\mathfrak{B}_n})(F)| = \sum_A \frac{\int_A g}{P(A)}\mathbf{1}_A = E^{\mathfrak{B}_n}(g) \leqslant E^{\mathfrak{B}_n}(|f|)$$

donc $|E^{\mathfrak{B}_{2^k}}(f)| \leqslant 2E^{\mathfrak{B}_n}(|f|)$.

Si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite finie de L^p on a

$$\left\| \sum_{k \geqslant 0} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} E^{\mathfrak{B}_{2^k}}(f_n)e_n \right\| \leqslant 2 \left\| \sum_{k \geqslant 1} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} E^{\mathfrak{B}_n}(|f_n|)e_n \right\|$$
$$\leqslant 2\|Q\| \left\| \sum_{n \geqslant 2} |f_n| e_n \right\| \leqslant 2\|Q\| \left\| \sum_n f_n e_n \right\|.$$

Donc $\|Q_1\| \leqslant 2\|Q\|$.

On démontrerait de la même façon que $\|Q_2\| \leqslant 2\|Q_1\|$.

PROPOSITION II.2. *Si X possède $\mathcal{P}_p$ alors* $\mathrm{Im}(I - Q)$ *est isomorphe à* $L^p(X)$.

DÉMONSTRATION. Soit F cette image, c'est un sous-espace complémenté de $L^p(X)$. On vérifie facilement que $L^p(X)$ est l_p-stable, il suffit de montrer que F contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(X)$. La méthode de décomposition de Pelczynski permet alors de conclure. Considérons le sous-espace F_1 de F défini par

$$F_1 = \left\{ \sum_n f_n e_n;\ E^{\mathfrak{B}_1} f_1 = 0,\ E^{\mathfrak{B}_{2^k}} f_j = 0\ \forall k \geqslant 1 \text{ et } 2^{k-1} < j \leqslant 2^k \right\}.$$

F_1 est donc le sous-espace engendré par les $(h_i \otimes e_n)$ avec $n \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned} &i > 2^k \quad \text{si } 2^{k-1} < n \leqslant 2^k \quad \text{et} \quad k \geqslant 1, \\ &i > 1 \quad \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

En utilisant Proposition II.1, on voit que F_1 est un sous-espace complémenté de $L^p(X)$ et si on pose

$$G_1 = \left\{ \sum_n f_n e_n;\ E^{\mathfrak{B}_1} f_1 = f_1,\ E^{\mathfrak{B}_{2^k}} f_j = f_j \forall k \geqslant 1 \text{ et } 2^{k-1} < j \leqslant 2^k \right\}.$$

Alors on a de manière naturelle $L^p(X) = F_1 \oplus G_1$. G_1 n'est autre que l'espace des fonctions $f = \Sigma_{n \geqslant 1} f_n e_n$ où f_1 est constante et où f_j est constante sur les atomes de $\mathfrak{B}_{2^k}$ pour $k \geqslant 1$ et $2^{k-1} < j \leqslant 2^k$.

Pour montrer que F_1 est isomorphe à $L^p(X)$ nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME II.3. *G_1 est isomorphe à $G_1 \times G_1 \times \mathbf{R}$.*

En effet si $(h_i)_{i \geqslant 1}$ désigne la suite de Haar et B_i le support de h_i on a $B_3 = [0, \frac{1}{2}]$, $B_4 = [\frac{1}{2}, 1]$.

On définit une application de $L^p([01], X)$ dans $L^p(B_3, X) \times L^p(B_4, X)$ définie par $\theta(f) = (f \mathbf{1}_{B_3}; f \mathbf{1}_{B_4})$.

θ est une isométrie si on munit le produit d'une norme convenable et $\theta(G_1)$ est formé des couples (φ, ψ) avec $\varphi = \Sigma_n \varphi_n e_n$, $\psi = \Sigma_n \psi_n e_n$ et en outre

$\varphi_1 = \psi_1 =$ constante $= f_1$.

$\varphi_2 =$ constante car f_2 est constante sur B_3, atome de $\mathfrak{B}_2$.

$\psi_2 =$ constante pour la même raison.

Si $k \geqslant 1\ 2^{k-1} < j \leqslant 2^k$ alors φ_j est constante sur les atomes de $\mathfrak{B}_{2^k}$ et de même pour ψ_j.

On voit facilement que $\{(\varphi - \varphi_1 e_1), (\psi - \psi_1 e_1)/(\varphi, \psi) \in \theta(G_1)\}$ forment un espace isomorphe à $G_1 \times G_1$, on voit donc finalement que $\theta(G_1)$, et par suite G_1, est isomorphe à $G_1 \times G_1 \times \mathbf{R}$. C.Q.F.D.

LEMME II.4. *G_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de F_1.*

DÉMONSTRATION. Nous allons définir une projection continue de F_1 dans lui-même et montrer que l'image RF_1 est isomorphe à G_1.

Posons $R(\Sigma_{n \geqslant 1} f_n e_n) = \Sigma_{n \geqslant 1} g_n e_n$ avec

$$\begin{aligned} g_1 &= E^{\mathfrak{B}_2} f_1, \\ g_j &= E^{\mathfrak{B}_{2^{k+1}}} f_j \quad \text{pour } 2^{k-1} < j \leqslant 2^k \quad \text{et} \quad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

R est continue à cause de la proposition II.1.

L'image de R est formée des fonctions $g = \Sigma_{n \geqslant 1} g_n e_n$ telle que

1°. g_1 est constante sur les atomes de $\mathfrak{B}_2$, par définition de g_1 et $\int_{B_1} g_1 = 0$ car $E^{\mathfrak{B}_1} g_1 = E^{\mathfrak{B}_1} f_1 = 0$ si f est dans F_1.

2°. Si $2^{k-1} < j \leqslant 2^k$, $k \geqslant 1$, alors g_j est constante sur les atomes de $\mathfrak{B}_{2^{k+1}}$ et si A est un atome de $\mathfrak{B}_{2^k}$ on a

$$\int_A g_j = 0 \quad \text{car } E_{\mathfrak{B}_{2^k}} f_j = E_{\mathfrak{B}_{2^k}} g_j = 0.$$

Or chaque atome A de $\mathfrak{B}_{2^k}$ s'écrit de manière unique $A = A' \cup A''$, où A' et A'' sont des atomes de $\mathfrak{B}_{2^{k+1}}$ et $P(A') = P(A'') = \frac{1}{2}P(A)$.

On peut donc écrire un élément RF_1 sous la forme $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e_j$ avec

1°. $g_1 = \alpha_1(\mathbf{1}_{B_3} - \mathbf{1}_{B_4})$,

2°. si $2^{k-1} < j \leqslant 2^k$, $k \geqslant 1$ alors $g_j = \sum_{A \in \mathfrak{B}_{2^k}} \alpha_{j,A}(\mathbf{1}_{A'} - \mathbf{1}_{A''})$.

On définit alors une isométrie entre (RF_1) et G_1 en posant

$$\theta(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{g}_j e_j$$

où

1°. $\hat{g}_1 = \alpha_1(\mathbf{1}_{B_3} + \mathbf{1}_{B_4}) = \alpha_1 \mathbf{1}_{[01]}$.

2°. Si $2^{k-1} < j \leqslant 2^k$, $k \geqslant 1$ $\hat{g}_j = \sum_{A \in \mathfrak{B}_{2^k}} \alpha_{j,A}(\mathbf{1}_{A'} + \mathbf{1}_{A''}) = \sum_{A \in \mathfrak{B}_{2^k}} \alpha_{jA} \mathbf{1}_A$.

Il est clair que $\|g(t)\|_X = \|\theta(g)(t)\|_X$ pour tout t, donc θ est une isométrie et on voit aisément que $\theta RF_1 = G_1$.

Ceci achève la dèmonstration du lemme II.4. C.Q.F.D.

Montrons maintenant que F_1 est isomorphe à $L^p(X)$.

On peut voir facilement que $L^p(X)$ est isomorphe à $\mathbf{R} \times L^p(X)$.

On a alors $\mathbf{R} \times L^p(X) \sim \mathbf{R} \times F_1 \times G_1$.

En utilisant le lemme II.4 on peut écrire $F_1 \sim G_1 \times H$.

Donc finalement $L^p(X) \sim \mathbf{R} \times L^p(X) \sim \mathbf{R} \times G_1 \times G_1 \times H$.

Par conséquent en utilisant le lemme II.3, puis à nouveau l'isomorphisme entre F_1 et $G_1 \times H$ on obtient: $L^p(X) \sim F_1$.

La proposition II.2 est donc démontrée.

Nous allons maintenant aborder la primarité de $L^p(X)$ pour un Banach X, à base symétrique et qui n'est pas isomorphe à c_0 ou à l_1. Dans ce cas nous allons pouvoir, en quelque sorte, diagonaliser la matrice associée à l'opérateur T.

PROPOSITION II.5. *Soit X un Banach à base symétrique (e_i) et non isomorphe à c_0 ou l_1. Soit T un opérateur de $L^p(X)$ et (k_{ij}) la matrice associée à cet opérateur et aux nombres (δ_{ij}). Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un ensemble B de mesure supérieure à $1 - \delta$, et une suite (n_i) d'entiers tels que*

$$\left|k_{n_i,n_j}(t)\right| \leqslant \frac{\delta}{2^{i+j}} \qquad \forall t \in B, \forall i \neq j.$$

DÉMONSTRATION. On pose en effet $n_1 = 1$.

Supposons construits $n_1 < n_2 < \cdots < n_{p-1}$ tels que

$$P\left(\left|k_{n_i n_j}\right| > \frac{\delta}{2^{i+j}}\right) < \frac{\delta}{4^{i+j}} \qquad \forall i < l,\ j < l,\ i \neq j.$$

En utilisant le corollaire I.11 on construit alors $n_l > n_{l-1}$ tel que

$$P\left(\left|k_{n_l,n_i}\right| > \frac{\delta}{2^{l+i}}\right) < \frac{\delta}{4^{l+i}} \qquad \forall i < l$$

et

$$P\left(\left|k_{n_i,n_l}\right| > \frac{\delta}{2^{l+i}}\right) < \frac{\delta}{4^{l+i}} \qquad \forall i < l.$$

La suite (n_l) étant ainsi construite on pose

$$B = \bigcap_i \bigcap_{j \neq i} \left\{ t / \left| k_{n_i, n_j}(t) \right| \leqslant \frac{\delta}{2^{i+j}} \right\}.$$

Par construction on a $P(B^c) \leqslant \Sigma_{i,j} \delta / 4^{i+j} < \delta$ donc $P(B) > 1 - \delta$. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant démontrer l'un des résultats principaux de ce paragraphe.

THÉORÈME II.6. *Soit X un Banach à base symétrique non isomorphe à c_0 ou l_1 et vérifiant la condition $\mathcal{P}_p$. Soit T un opérateur de $L^p(X)$, alors ou l'image de T ou l'image de $(I - T)$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(X)$.*

DÉMONSTRATION. Soit T un tel opérateur. Donnons nous $\varepsilon > 0$ et on choisit alors δ suffisamment petit et ensuite des nombres (δ_{ij}) arbitrairement petits. Nous verrons au cours des calculs les conditions à imposer. En utilisant la proposition I.9 on peut associer aux nombres (δ_{ij}) et à T deux matrices (k_{ij}) et (k'_{ij}) qui sont en fait les matrices associées à T et $(I - T)$ respectivement.

On a, d'aprés cette proposition:

$$k_{ii} + k'_{ii} \geqslant 1 - 2\delta_{ii} \geqslant 1 - \delta \quad \text{si } \delta_{ii} < \frac{\delta}{2}.$$

Posons alors $\Omega_i = \{t / k_{ii}(t) \geqslant (1 - \delta)/2\}, \Omega'_i = \{t / k'_{ii}(t) \geqslant (1 - \delta)/2\}$. On a donc $\Omega_i \cup \Omega'_i = [01]$ ps. On doit donc envisager deux cas:

Cas I. Il existe une partie infinie I de $\mathbf{N}$ telle que, par exemple, $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ soit de mesure positive (sinon on remplace T par $(I - T)$).

Cas II. Pour toute partie infinie I de $\mathbf{N}$, on a $\bigcap_{i \in I} \Omega_i = \bigcap_{i \in I} \Omega'_i = \varnothing$ ps. Dans ce cas comme $\Omega'_i \subset \Omega_i$, on aura $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = [01]$ ps, pour toute partie infinie I.

DÉMONSTRATION DANS LE CAS I. Nous utilisons la proposition II.5 pour trouver une suite (n'_i) d'entiers et un ensemble B de mesure positive, contenu dans $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ tel que

$$\left| k_{n'_i, n'_j}(t) \right| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \qquad \forall t \in B, \forall i \neq j,$$

$$k_{n'_i, n'_i}(t) \geqslant \frac{1 - \delta}{2} \qquad \forall t \in B.$$

Le principe de la démonstration est le suivant: on construit une suite (n_i) extraite de (n'_i) et une suite (h_i) de fonctions sur B qui soit isométrique à la suite de Haar sur $[01]$ et un sous-espace F de $L^p(B, \mathcal{B}, X)$ où $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par les h_i, tels que F soit isomorphe à $L^p(X)$. On construit de plus un opérateur π de $L^p(X)$ sur F tel que $\pi \circ T_{|F}$ soit un isomorphisme de F sur F.

Alors l'espace TF est celui cherché pour satisfaire à l'énoncé II.6. En effet, $T_{|F}$ est un isomorphisme de F sur TF dont TF est isomorphe à $L^p(X)$. D'autre part $\pi_{|TF}$ est un isomorphisme de TF sur F donc $(\pi_{|TF})^{-1} \circ \pi$ est une projection de $L^p(X)$ sur F.

La démonstration sera achevée si nous construisons tous ces éléments.

Construction de F en supposant $(h_i), (n_i)$ construits. Désignons par $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ et $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la suite (h_i).

Soit $\tilde{X}$ l'espace engendré par la suite (e_{n_i}) dans X. Il existe une isométrie entre $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ et $L^p(X)$. Posons alors $F = \{f = \Sigma_i f_{n_i} e_{n_i};\ f \in L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ et $E^{\mathfrak{B}_i} f_{n_i} = 0\}$. Par l'isométrie naturalle indiquée ci-dessus, qui associe à h_i la $i$ème fonction de Haar sur [01] et à e_{n_k} associe e_k, l'espace F devient l'espace $F = \mathrm{Im}(I - Q)$ de la proposition II.2. L'espace F construit est donc isomorphe à $L^p(X)$ car X possède $\mathcal{P}_p$.

Construction de (h_i) *et* (n_i). 1. On pose $n_1 = n'_1$, $B_1 = B$ et $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2. Pour $l \geqslant 2$ on va définir par récurrence $(n_l), (B_l)$ et h_l tels que $B_2 = B$ et

$$B_{2^{i-1}} = \text{Support de } h_i^+ \text{ pour } i \geqslant 2,$$

$$B_{2^i} = \text{Support de } h_i^- \text{ pour } i \geqslant 2,$$

$$h_l \in X(B_l) \text{ pour } l \geqslant 2 \text{ et en outre}$$

$$\text{(a)} \qquad \|T_{n_l,n_j}(h_k)\| < \delta_{l,j} \frac{\|h_k\|}{2^{k+1}} \qquad \forall k < l,\ j < l.$$

Ceci est possible car si h_k et n_j sont fixés alors $\Sigma_s T_{n'_s,n_j}(h_k) e_s$ est un élément de $L^p(X)$ et par conséquent est fini presque partout. On a donc

$$\lim_{s \to +\infty} T_{n'_s,n_j}(h_k) = 0 \quad \text{ps.}$$

Comme $T_{n'_s,n_j}(h_k)| \leqslant \|\Sigma_s T_{n'_s,n_j}(h_k) e_s\|_X$ et que ce second membre est dans L^p, d'après le théorème de Lebesgue la suite $T_{n'_s,n_j}(h_k)$ ter.d vers 0 dans L^p et on peut choisir n_l de façon à réaliser (a).

On détermine ensuite h_l dans $X(B_l)$ tel que

$$\text{(b)} \qquad \left|\langle T_{n_i,n_j}(h_l), h_k\rangle\right| < \delta_{ij} \frac{\|h_l\|_p}{2^{l+1}} \frac{\|h_k\|_q}{2^{k+1}} \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l,\ k < l.$$

$$\text{(c)} \qquad \left|\langle T_{n_i,n_j} h_k, h_l\rangle\right| < \delta_{ij} \frac{\|h_k\|_p}{2^{k+1}} \frac{\|h_l\|_q}{2^{l+1}} \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l,\ k < l.$$

$$\text{(d)} \qquad \left|\langle k_{n_i,n_j}, h_l\rangle\right| < \delta_{ij} \frac{P(B_l)}{2^{l+2}} \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l.$$

$$\text{(e)} \qquad \left|\langle T_{n_i,n_j} h_l, h_l\rangle - \theta_{n_i n_j}(B_l)\right| < \delta_{ij} P(B_l)^3 \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l.$$

Si on généralise les notation de la proposition I.1, la condition (e) sera réalisée dès que h_l sera dans $X_{n_l,n_l}(B_l)$. Or nous savons que 0 est adhérent à cet ensemble. Comme d'autre part (b), (c), (d) sont des conditions qui imposent à h_l d'être dans un certain voisinage de 0, le choix de h_l sera toujours possible.

La construction de la suite est faite. Posons alors

$$\varphi_i = E^{\mathfrak{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_i}\right).$$

On a $\varphi_i \geqslant (1 - \delta)/2$. Nous allons voir que si $f = \Sigma_i f_{n_i} e_{n_i}$ est dans F, alors la coordonnée d'indice n_i de Tf est "assez proche" de $\varphi_i f_{n_i}$.

Posons pour cela $\Delta_{ij} = E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j}(f_{n_j}))$ et $\Delta = \Sigma_i(\Sigma_j \Delta_{ij} - \varphi_i f_{n_i}) e_{n_i}$.Nous allons évaluer la norme de Δ, ce qui nous permettra ensuite de construire l'opérateur π.

Evaluation de Δ_{ij} *pour* $j < i$. Supposons d'abord $f_{n_j} = h_l$ avec $l > j$ (car $E^{\mathcal{B}_j} f_{n_j} = 0$).

Si $l < i$ on peut utiliser (a):

$$\|T_{n_i n_j}(h_j)\| < \delta_{ij} \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}}$$

donc $\|\Delta_{ij}\| < \delta_{ij} \|h_l\| / 2^{l+1}$.

Si $l \geqslant i$ on écrit alors

$$\Delta_{ij} = \left[\Delta_{ij} - h_l E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)\right] + h_l E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) = \psi_l + h_l E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right).$$

Il est facile de voir que pour φ dans L^p on a la formule

$$E^{\mathcal{B}} \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi \frac{h_k}{\|h_k\|_q} \rangle \frac{h_k}{\|h_k\|_p}.$$

On peut donc écrire

$$\psi_l = \sum_{k \neq l} \langle T_{n_i n_j} h_l, \frac{h_k}{\|h_k\|_q} \rangle \frac{h_k}{\|h_k\|_p} + \left[\frac{\theta_{n_i n_j}(B_l)}{P(B_l)} - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)\right] h_l$$
$$+ \frac{\langle T_{n_i n_j} h_l \rangle - \theta_{n_i n_j}(B_l)}{P(B_l)} h_l,$$

$$\psi_l = \psi_l' + \psi_l'' + c_l h_l.$$

Comme $j < i \leqslant l$ et $k \neq l$, on peut appliquer (b) ou (c) pour majorer chaque terme intervenant dans la première somme. On a donc

$$\|\psi_l'\| < \delta_{ij} \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}}.$$

Pour le second terme on remarque que

$$\frac{\theta_{n_i n_j}(B_l)}{P(B_l)} = \frac{1}{P(B_l)} \int_{B_l} k_{n_i n_j} \mathbf{1}_B.$$

Or B_l étant un atome de $\mathcal{B}_{l-1}$, ceci représente la valeur de $E^{\mathcal{B}_{l-1}}(\pi_B k_{n_i n_j})$ sur B_l. Comme h_l est à support dans B_l on a

$$\psi_l'' = (E^{\mathcal{B}_{l-1}} - E^{\mathcal{B}})\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) h_l.$$

Or $(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}) = \sum_{k=l}^{\infty} \langle k_{n_i n_j}, h_k \rangle h_k / P(B_k)$.

En utilisant (d) on trouve

$$\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)\|_\infty \leqslant \frac{\delta_{ij}}{2^{l+1}}.$$

Donc $\|\psi_l''\| \leqslant \delta_{ij} \|h_l\| / 2^{l+1}$.

Enfin la condition (e) nous donne $|c_l| < \delta_{ij} P(B_l)^2$. On obtient finalement $\Delta_{ij} = \psi_l + h_l E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})$ et $\|\psi_l\| < \delta_{ij}(1/2^l + P(B_l)^2)\|h_l\|$.

Dans le cas où f_{n_j} n'est plus de la forme h_l on écrit:

$$f_{n_j} = \sum_{l=j+1}^{\infty} b_l \frac{h_l}{\|h_l\|} \quad \text{avec } b_l = (E^{\mathcal{B}_l} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})\left(f_{n_j}\right).$$

On pose $f'_{n_j} = E^{\mathcal{B}_{i-1}} f_{n_j}$ et $f''_{n_j} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(f_{n_j})$. On a $|b_l| \leqslant 2\|f_{n_j}\|$ et $\|f'_{n_j}\| \leqslant \|f_{n_j}\|, \|f''_{n_j}\| \leqslant 2\|f_{n_j}\|$. On obtient, en notant $\Delta_{ij}(h_l)$ l'expression étudiée ci-dessus

$$\Delta_{ij} = \sum_{l=j+1}^{i-1} \Delta_{ij}(h_l)\frac{b_l}{\|h_l\|} + \sum_{l=i}^{\infty} \frac{b_l}{\|h_l\|}\psi_l + f''_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right).$$

Les majorations ci-dessus permettent de majorer Δ_{ij}. Posons $\Delta_{ij} = E_{ij} + f''_{n_j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})$, alors

$$\|E_{ij}\| \leqslant \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|b_l|}{\|h_l\|}\delta_{ij}\left(\frac{1}{2^l} + P(B_l)^2\right)\|h_l\| \leqslant 2\delta_{ij}\|f_{n_j}\| \sum_{l=j+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^l} + (P(B_l))^2\right).$$

On montre facilement que dans la suite $P(B_l)$ il y a 2^k termes de valeur $P(B)/2^k$ pour $k \geqslant 1$ et deux termes de valeurs $P(B)$, donc $\sum_l P(B_l)^2 = C < 1 + 1 + \sum_{k\geqslant 1} 1/2^k = 3$

$$\|E_{ij}\| \leqslant 6\delta_{ij}\|f_{n_j}\|.$$

D'autre part comme $i > j$, on a $|k_{n_i n_j}|\,\mathbf{1}_B < \delta/2^{i+j}$ ps donc $\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})\|_\infty < \delta/2^{i+j}$. On obtient donc $\|\Delta_{ij}\| \leqslant 6\delta_{ij}\|f_{n_j}\| + \delta\|f_{n_j}\|/2^{i+j-1}$.

Si δ et δ_{ij} sont assez petits devant ε on a $\|\Delta_{ij}\| < \varepsilon\|f_{n_j}\|/2^{i+j}$.

Evaluation de Δ_{ij} pour $j \geqslant i$. En supposant d'abord $f_{n_j} = h_l$, avec $l > j \geqslant i$, on peut refaire le même calcul que ci-dessus. Cette fois $f'_{n_j} = 0$ et $f''_{n_j} = f_{n_j}$. On obtient $\Delta_{ij} = E_{ij} + f_{n_j} E^{\mathcal{B}}(k_{n_i n_j})$ avec $\|E_{ij}\| \leqslant 6\delta_{ij}\|f_{n_j}\|$.

Si $j > i$ on a de nouveau, $\|E^{\mathcal{B}}(k_{n_i n_j})\|_\infty < \delta/2^{i+j}$ et par conséquent

$$\|\Delta_{ij}\| \leqslant \left(6\delta_{ij} + \frac{\delta}{2^{i+j}}\right)\|f_{n_j}\| < \frac{\varepsilon\|f_{n_j}\|}{2^{i+j}} \quad \text{pour } j > i.$$

Si $j = i$ on peut majorer $\Delta_{ii} - \varphi_i f_{n_i} = E_{ii}$

$$\|\Delta_{ii} - \varphi_i f_{n_i}\| \leqslant 6\delta_{ii}\|f_{n_i}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2i}}\|f_{n_i}\|.$$

Nous pouvons maintenant majorer Δ

$$\|\Delta\|_{L^p(X)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j\neq i}\|\Delta_{ij}\|_p + \|\Delta_{ii} - \varphi_i f_{n_i}\|_p\right),$$

$$\|\Delta\|_{L^p(X)} \leqslant \sum_{i,j}\frac{\varepsilon}{2^{i+j}}\|f\| = \varepsilon\|f\|.$$

Construction de l'application π. On définit d'abord π_1 de $L^p(X)$ dans lui-même on posant

$$\pi_1\left(\sum_i g_i e_i\right) = \sum_i \frac{E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B g_{n_i})}{\varphi_i} e_{n_i}.$$

Comme $\varphi_i \geqslant (1-\delta)/2$ sur B on a donc

$$\|\pi_1 g\|_X \leqslant \frac{2}{1-\delta}\left\|E^{\mathcal{B}}\left(\sum_i \mathbf{1}_B g_{n_i} e_{n_i}\right)\right\|_X \quad \text{presque surement.}$$

Or $\|\Sigma_i g_{n_i} e_{n_i}\|_X$ est dans L^p, donc aussi $E^{\mathcal{B}}(\|\Sigma_i g_{n_i} e_{n_i}\|_X \mathbf{1}_B)$ et comme $\|E^{\mathcal{B}}(\Sigma_i \mathbf{1}_B g_{n_i} e_{n_i})\| \leqslant E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \|\Sigma_i g_{n_i} e_{n_i}\|)$. $\|\pi_1 g\|_X$ est majorée par une fonction de L^p, elle est donc aussi dans L^p. π_1 est continue. On a même $\|\pi_1\| \leqslant 2/(1-\delta)$.

Posons ensuite $\pi_2(\Sigma_i g_i e_i) = \Sigma_i (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_i})(g_{n_i}) e_{n_i}$. π_2 est la projection de $L^p(X)$ sur l'espace F. En décomposant π_2 en produit d'une projection de $L^p(X)$ sur $L^p(B, \mathcal{B}, \tilde{X})$ et d'une projection de cet espace sur F on voit facilement que π_2 a même norme que la projection $(I - Q)$ étudiée à la proposition II.2. Cette norme est donc indépendante de la construction faite et ne dépend que de X.

Posons $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$. On a $\pi \circ Tf - f = \pi_2 \circ \pi_1 Tf - \pi_2 f$. Donc $\|\pi \circ Tf - f\| \leqslant \|\pi_2\| \, \|\pi_1 Tf - f\|$. Or

$$\pi_1 Tf - f = \sum_i \left(\sum_j \frac{\Delta_{ij}}{\varphi_i} - f_{n_i} \right).$$

On a donc

$$\|\pi_1 \circ Tf - f\| \leqslant \frac{2}{1-\delta} \|\Delta\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-\delta} \|f\|.$$

On en tire

$$\|\pi \circ Tf - f\| < \alpha \|f\|, \qquad \alpha = \frac{2\varepsilon \|\pi_2\|}{1-\delta}.$$

Si ε est assez petit et $\delta < \frac{1}{2}$ on a

$$\alpha < 4\varepsilon \|\pi_2\| < 1.$$

Cette inégalité permet d'affirmer, si $\alpha < 1$, que $\pi \circ T$ est alors un isomorphisme de F sur F. Ceci achève la démonstration du théorème dans le cas I.

DÉMONSTRATION DANS LE CAS II.

On commence par déterminer un ensemble A_0 de mesure supérieure à $1 - \varepsilon/2$ et une suite (n_i) telle que

$$\left|k_{n_i n_j}(t)\right| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \qquad \forall t \in A_0 \text{ et } i \neq j.$$

Ceci est possible grâce à la proposition II.5.

En utilisant l'hypothèse II on construit des entiers $p_1 < q_1 < p_2 < q_2, \ldots$ tel que $A_1 = \bigcap_s \bigcup_{i=p_s}^{q_s} \Omega_{n_i}$ soit de mesure supérieure à $1 - \varepsilon/2$. On pose alors $\Omega_i = A_0 \cap A_1 \cap \Omega_{n_i}$, et on peut supposer, en diminuant au besoin ces ensembles supposer que pour chaque s, $\{\Omega_i;\ p_s \leqslant i \leqslant q_s\}$ forment une partition mesurable de $A_0 \cap A_1 = B$.

On va construire comme précédemment une suite d'entiers $s(r)$ et une suite de fonctions (h_i) sur B isométrique à la base de Haar, un sous-espace F_0 de $L^p(B, \mathcal{B}, X)$ isomorphe à $L^p(X)$ et un opérateur π de $L^p(X)$ dans F_0 tel que $\pi \circ T_{|F_0}$ soit un isomorphisme de F_0 sur F_0. On pourra alors conclure que (TF_0) est un sous-espace complémenté de $L^p(X)$, isomorphe à $L^p(X)$ et contenu dans l'image de T.

Construction de F_0 en supposant les suites $(s(r))$ et (h_r) construites. Nous noterons toujours $\mathcal{B}_r$ la tribu engendrée par $\{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$ et on pose

$$F_0 = \left\{ f = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \sum_{j=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j};\ \lambda_r \in L^p(B, \mathcal{B}) E^{\mathcal{B}_r} \lambda_r = 0 \right\}.$$

Il est clair que pour t fixé on a $\| f(t)\|_X = \|\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r(t)e_r\|_X$ donc

$$\| f \|_{L^p(X)} = \left\| \sum_r \lambda_r e_r \right\|_{L^p(X)}.$$

L'espace F_0 est donc insométrique à l'espace F étudié au cas I et par conséquent est isomorphe à $L^p(X)$.

Construction de $(s(r))$ *et* (h_r). 1. On pose $s(1) = 1$, $h_1 = \mathbf{1}_B$ et $B_1 = B$.

2. On construit alors par récurrence $s(l)$ et h_l de façon que $B_2 = B$ et

$$B_{2i-1} = \text{support de } h_i^+ \text{ si } i \geqslant 2,$$
$$B_{2i} = \text{support de } h_i^- \text{ si } i \geqslant 2.$$

h_l soit dans $X(B_l)$ pour $l \geqslant 2$ et en outre les conditions suivantes soient réalisées

$$\text{(a)} \qquad \left\| \sum_{i=p_{s(l)}}^{q_{s(l)}} \mathbf{1}_{\Omega_i} T_{n_i n_j}\left(h_k \mathbf{1}_{\Omega_j}\right) \right\| < \delta_{lj} \frac{\|h_k\|}{2^{k+1}} \quad \text{si } k < l,\ j \leqslant q_{s(l-1)}.$$

Ceci est réalisable car si k et j sont fixés, posons

$$\theta_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} \mathbf{1}_{\Omega_i} T_{n_i n_j}\left(h_k \mathbf{1}_{\Omega_j}\right).$$

Pour chaque t, il existe un seul indice i_n entre p_n et q_n tel que t soit dans Ω_{i_n}. On a donc

$$|\theta_n(t)| = T_{n_{i_n} n_j}\left(h_k \mathbf{1}_{\Omega_j}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, i_n tend également vers $+\infty$, or on sait que

$$\lim_{s \to \infty} T_{n_s, n_j}\left(h_k \mathbf{1}_{\Omega_j}\right) = 0 \quad \text{ps}$$

donc θ_n tend vers 0 presque partout.

Comme θ_n est majoré par $\|T \circ u_{n_j}(h_k \mathbf{1}_{\Omega_j})\|_X$, qui est un élément de L^p, on peut affirmer, d'après le théorème de Lebesgue, que θ_n tend vers 0 dans L^p. On pourra donc choisir $s(l)$ assez grand pour réaliser (a).

$$\text{(b)} \qquad \left|\langle T_{n_i n_j}\left(h_l \mathbf{1}_{\Omega_j}\right), h_k \mathbf{1}_{\Omega_i}\rangle\right| < \delta_{ij} \frac{\|h_l\|_p}{2^{l+1}} \frac{\|h_k\|_q}{2^{k+1}} \quad \text{si } k < l,\ i \leqslant q_{s(l)},\ j \leqslant q_{s(l)}.$$

$$\text{(c)} \qquad \left|\langle T_{n_i n_j}\left(h_k \mathbf{1}_{\Omega_j}\right), h_l \mathbf{1}_{\Omega_i}\rangle\right| < \delta_{ij} \frac{\|h_k\|_p}{2^{k+1}} \frac{\|h_l\|_q}{2^{l+1}} \quad \text{si } k < l,\ i \leqslant q_{s(l)} \text{ et } j \leqslant q_{s(l)}.$$

$$\text{(d)} \qquad \left|\langle k_{n_i n_j}, h_l \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j}\rangle\right| < \delta_{ij} \frac{P(B_l)}{2^{l+2}} \quad \text{si } i \leqslant q_{s(l)},\ j \leqslant q_{s(l)}.$$

(e)

$$\left|\langle T_{n_i n_j}\left(h_l \mathbf{1}_{\Omega_j}\right), h_l \mathbf{1}_{\Omega_i}\rangle - \theta_{n_i n_j}\left(B_l \cap \Omega_i \cap \Omega_j\right)\right| < 2\delta_{ij} P(B_l)^3 \quad \text{si } i \leqslant q_{s(l)},\ j \leqslant q_{s(l)}.$$

Pour choisir h_l vérifiant les conditions (b), (c), (d), (e) nous poserons

$$J = \{\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_{l-1});\ p_k \leqslant i_k \leqslant q_k\}.$$

Fixons l, donc B_l est parfaitement déterminé et posons

$$\Phi_\alpha = \bigcap_{k=1}^{l-1} \Omega_{i_k} \cap B_l \quad \text{pour } \alpha = (i_1, \ldots, i_{l-1}).$$

Les ensembles $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in J}$ forment une partition de B_l. On peut alors, en revenant à la construction même des mesures $\theta_{n_i n_j}$ définies au chapitre I, choisir pour chaque α, un élément h_α dans $X(\Phi_\alpha)$ qui soit dans un voisinage arbitraire de 0 et tel que

$$\left|\langle T_{n_i n_j} h_\alpha, h_\alpha \rangle - \theta_{n_i n_j}(\Phi_\alpha)\right| < \delta_{ij} P(\Phi_\alpha)^3 \qquad \forall i \leqslant q_{s(l)} \quad \text{et} \quad j \leqslant q_{s(l)}.$$

Comme J est un ensemble fini, nous choisirons les h_α par récurrence, suffisamment proches de 0 pour que l'on ait

$$\sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha \in J, \beta \in J}} \left|\langle T_{n_i n_j} h_\alpha, h_\beta \rangle\right| < \delta_{ij} P(B_l)^3,$$

$h_l = \Sigma_{\alpha \in J} h_\alpha$ vérifie les conditions (b), (c), (d). Il est alors facile de voir que h_l vérifie aussi (e) car si on pose

$$J_1 = \{\alpha;\, \Phi_\alpha \subset \Omega_i\} \quad \text{et} \quad J_2 = \{\alpha;\, \Phi_\alpha \subset \Omega_j\},$$

$$h_l \mathbf{1}_{\Omega_i} = \sum_{\alpha \in J_1} h_\alpha, \quad h_l \mathbf{1}_{\Omega_j} = \sum_{\beta \in J_2} h_\beta,$$

$$J_0 = J_1 \cap J_2 = \{\alpha;\, \Phi_\alpha \subset \Omega_i \cap \Omega_j\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{\alpha \in J_0} \Phi_\alpha = \Omega_i \cap \Omega_j \cap B_l.$$

On peut écrire $\langle T_{n_i n_j}(h_l \mathbf{1}_{\Omega_i}), h_l \mathbf{1}_{\Omega_j} \rangle = \Sigma_{\alpha \in J_0} \langle T_{n_i n_j} h_\alpha, h_\alpha \rangle + R$. R est une somme d'intégrale de la forme $\langle T_{n_i n_j} h_\alpha, h_\beta \rangle$ avec $\alpha \neq \beta$ donc nécessairement $|R| < \delta_{ij} P(B_l)^3$. Comme d'autre part $|\langle T_{n_i n_j}, h_\alpha, h_\alpha \rangle - \theta_{n_i n_j}(\Phi_\alpha)| < \delta_{ij} P(\Phi_\alpha)^3$. On en déduit

$$\left|\langle T_{n_i n_j}(h_l \mathbf{1}_{\Omega_j}), h_l \mathbf{1}_{\Omega_i} \rangle - \theta_{n_i n_j}(\Omega_i \cap \Omega_j \cap B_l)\right| < 2\delta_{ij} P(B_l)^3.$$

On peut donc construire les suites $s(l)$ et (h_l) qui vérifient les conditions (a), (b), (c), (d) et (e).

Posons maintenant $\varphi_r = \Sigma_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\Omega_{ii}} k_{n_i n_i})$. Comme $\Sigma_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \mathbf{1}_{\Omega_i} k_{n_i n_i} \geqslant (1-\delta)/2$, on a $\varphi_r \geqslant (1-\delta)/2$.

Donnons nous maintenant un élément de F_0

$$f = \sum_n \sum_{j=p_{s(n)}}^{q_{s(n)}} \lambda_n \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j} \quad \text{avec } \lambda_n \in L^p(B, \mathcal{B}),\ E^{\mathcal{B}_n} \lambda_n = 0.$$

On a donc $f = \Sigma_j f_{n_j} e_{n_j}$ avec $f_{n_j} = \lambda_n \mathbf{1}_{\Omega_j}$ si $p_{s(n)} \leqslant j \leqslant q_{s(n)}$ et $f_{n_j} = 0$ si j n'est pas dans un tel intervalle. Posons

$$\Delta_{ij} = E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i} T_{n_i n_j} f_{n_j}\right)$$

et $\Delta = \Sigma_r \Delta^{(r)} e_r$ avec $\Delta^{(r)} = \Sigma_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \Sigma_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij} - \varphi_r \lambda_r$. Nous allons majorer la norme de Δ par $\varepsilon \| f \|$ et nous en déduirons la construction d'un opérateur π qui convienne.

Posons

$$\Delta^{r,n} = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \sum_{j=p_{s(n)}}^{q_{s(n)}} \Delta_{ij}.$$

On a donc

$$\Delta = \sum_r \left(\sum_n \Delta^{r,n} - \varphi_r \lambda_r \right) e_r.$$

Evaluation de $\Delta^{r,n}$ pour $n < r$. En utilisant des techniques analogues à celles du Cas I on montre que

$$\left\| \Delta^{r,n} - \lambda_n'' \Phi^{(r,n)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+r+1}} \| \lambda_n \|$$

où

$$\Phi^{(r,n)} = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \sum_{j=p_{s(n)}}^{q_{s(n)}} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j} k_{n_i n_j} \right).$$

Comme $\| \Phi^{(r,n)} \|_\infty \leqslant \delta / 2^{n+r} < \varepsilon / 2^{n+r+2}$ on en déduit que

$$\| \Delta^{r,n} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{r+n}} \| \lambda_n \|.$$

Evaluation de $\Delta^{r,n}$ pour $n \geqslant r$. Dans ce cas $\lambda_n'' = \lambda_n$. On obtient de même

$$\| \Delta^{rn} - \lambda_n'' \Delta^{(r,n)} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+r+1}} \| \lambda_n \|.$$

Pour $n > r$ on a $\| \Phi^{(r,n)} \|_\infty \leqslant \varepsilon / 2^{n+r+2}$ donc

$$\| \Delta^{r,n} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+r}} \| \lambda_n \|.$$

Pour $n = r$, $\Phi^{(r,r)} = \varphi_r$ et on a

$$\| \Delta^{r,r} - \varphi_r \lambda_r \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2r}} \| \lambda_n \|.$$

On en déduit $\| \Delta \| \leqslant \varepsilon \| f \|$.

Construction de l'opérateur π. Nous allons maintenant montrer, en utilisant la majoration ci-dessus qu'il existe un opérateur π de $L^p(X)$ dans F_0 tel que $\pi \circ T_{|F_0}$ soit un isomorphisme de F_0 sur F_0.

Définissons π_1 en posant

$$\pi_1\left(\sum_i f_i e_i \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_B}{\varphi_r} \left[\sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i} f_{n_i} \right) \right] e_r.$$

Montrons que π_1 est continue: on a $\varphi_r \geqslant (1 - \delta)/2$ sur B donc

$$\| \pi_1 f \|_X \leqslant \frac{2}{1 - \delta} \left\| \sum_r \left[\sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i} f_{n_i} \right) \right] e_r \right\|_X.$$

Pour t fixé, il existe pour chaque r un indice i_r tel que

$$p_{s(r)} \leqslant i_r \leqslant q_{s(r)} \quad \text{et} \quad t \in \Omega_{i_r}.$$

On en déduit facilement $\|\Sigma_r \Sigma_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \mathbf{1}_{\Omega_i} f_{n_i} e_r\|_X \leqslant \|f\|_X$. Comme l'espérance conditionnelle est de norme 1 on a donc

$$\|\pi_1 f\|_{L^p(X)} \leqslant \frac{2}{1-\delta} \|f\|_{L^p(X)}.$$

Posons maintenant $\pi_2(\Sigma_r \mu_r e_r) = \Sigma_r (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_r})(\mu_r) e_r$. Si X possède la propriété $\mathcal{P}_p$ π_2 est continue et on voit facilement que la norme de π_2 ne dépend pas des constructions de B et $\mathcal{B}$, mais seulement de X.

Posons enfin $\pi_3(\Sigma_r \nu_r e_r) = \Sigma_r \Sigma_{j=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \nu_r \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j}$. Il est facile de voir que, puisque la base est symétrique

$$\|\pi_3 \nu\|_X = \|\nu\|_X$$

donc π_3 est une isométrie.

Posons $\pi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. Remarquons d'abord que $(\pi_3 \circ \pi_2)$ a son image dans F_0. D'autre part si f est un élément de F_0

$$f = \sum_r \sum_{j=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \lambda_n \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j} = \pi_3(\lambda) \quad \text{et} \quad \pi_2(\lambda) = \lambda$$

donc $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1(Tf) - f = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1(Tf) - \pi_3 \circ \pi_2(\lambda)$. On en tire

$$\|\pi \circ Tf - f\| \leqslant \|\pi_3 \circ \pi_2\| \, \|\pi_1 Tf - \lambda\|.$$

Mais $\|\pi_3 \circ \pi_2\| = \|\pi_2\|$ et $\|\pi_1 Tf - \lambda\| \leqslant 2\|\Delta\|/(1-\delta) \leqslant 2\varepsilon\|f\|/(1-\delta)$, car pour passer de l'expression de Δ à celle de $(\pi_1 Tf - \lambda)$ il faut diviser le coefficient de e_r par φ_r. On obtient finalement: $\|\pi \circ Tf - f\| \leqslant 2\varepsilon\|\pi_2\| \, \|f\|/(1-\delta)$.

Si $\delta < \frac{1}{2}$ et $\varepsilon < 1/4\|\pi_2\|$ alors $2\varepsilon\|\pi_2\|/(1-\delta) < 1$ et la majoration ci-dessus prouve que $\pi \circ T_{|F_0}$ est un isomorphisme de F_0 sur F_0. Ceci achève la démonstration dans le cas II et par conséquent celle du théorème II.6.

Nous pouvons donner une application importante, qui est le résultat essentiel de ce paragraphe.

THÉORÈME II.7. *Soit X un Banach à base symétrique, non isomorphe à c_0 ou l_1, et possèdant la propriété $\mathcal{P}_p$, alors $L^p(X)$ est primaire.*

DÉMONSTRATION. $L^p(X)$ est l_p-stable. On pourra donc appliquer la méthode de décomposition de Pelczinski. Soit T une projection de $L^p(X)$. D'après le théorème II.6, $(\operatorname{Im} T)$ ou $\operatorname{Im}(I - T)$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(X)$. Supposons par exemple que

$$(\operatorname{Im} T) \sim L^p(X) \oplus E.$$

Comme $L^p(X) \sim (\operatorname{Im} T) \oplus F$, on a

$$(\operatorname{Im} T) \sim L^p(X) \oplus E \sim (\oplus L^p(X))_{l_p} \oplus E \sim L^p(X) \oplus (\oplus L^p(X))_p \oplus E,$$

$$(\operatorname{Im} T) \sim L^p(X) \oplus E \oplus (\oplus \operatorname{Im} T)_{l_p} \oplus (\oplus F)_{l_p},$$

$$(\operatorname{Im} T) \sim (\oplus \operatorname{Im} T)_{l_p} \oplus (\oplus F)_{l_p},$$

$$\operatorname{Im} T \sim (\oplus L^p(X))_{l_p} \sim L^p(X). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le problème se pose naturellement d'étudier les espaces $L^p(l_1)$ et $L^p(c_0)$. L'objet des deux chapitres suivants est de voir pour quelles valeurs de p, il vérifient $\mathcal{P}_p$ et d'étudier alors la primarité des espaces $L^p(l_1)$ et $L^p(c_0)$ correspondants.

Pour conclure ce paragraphe remarquons que si $1 < p < \infty$ et $1 < r < \infty$, la base naturelle $(h_i \otimes e_n)_{i \geqslant 1, n \geqslant 1}$ de $L^p(l_r)$ est une base inconditionnelle. On a donc automatiquement la propriété $\mathcal{P}_p$ pour l_r. Le théorème II.7 permet de retrouver les résultats de [**1**].

III. Primarité de $L^p(l_1)$ et $L^p(c_0)$. Remarquons d'abord que pour $p \geqslant 1$, l'espace $L^p(l_1)$ possède la propriété $\mathcal{P}_p$ (voir démonstration dans [**2**]).

THÉORÈME III.1. *Soit T un opérateur de $L^p(l_1)$, $1 \leqslant p < \infty$, alors l'un des deux espaces* $(\operatorname{Im} T)$ *ou* $\operatorname{Im}(I - T)$ *contient un sous-espace complémenté isomorphe à* $L^p(l_1)$.

DÉMONSTRATION. Le début de la démonstration est tout à fait le même. On associe à T les deux matrices (k_{ij}) et (k'_{ij}) et les ensembles Ω_i et Ω'_i comme dans le théorème II.6. On doit envisager les deux cas.

DÉMONSTRATION DANS LE CAS I. On suppose dans ce cas qu'il existe une partie infinie I de $\mathbf{N}$ telle que $\bigcap_{i \in I} \omega_i$ soit de mesure positive. On ne peut plus ici utiliser la proposition II.5. On a cependant la première partie du corollaire I.11 et cela nous permet de construire une suite (n'_i) contenue dans I et un ensemble A_1, contenu dans $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$,

$$\left|k_{n'_i, n'_j}(t)\right| < \frac{\delta}{4^i} \qquad \forall i > j, \forall t \in A_1,$$

$$k_{n'_i n'_i}(t) \geqslant \frac{1-\delta}{2} \qquad \forall t \in A_1.$$

Définissons maintenant une suite dans $L^\infty(l_1)$, qui est le dual $L^1(c_0)$ car l_1 possède la propriété de Radon-Nykodim [**8**], en posant

$$X^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{n'_i n'_l}(t) e_i.$$

Construction de (h_i) *et* (n_i). 1. Posons $n''_1 = n_1$, $B_1 = B$ et $h_1 = \pi_B$.

2. Pour $l \geqslant 2$ on définit B_l, n_l et h_l de façon que $B_2 = B$ et

$$B_{2i-1} = \text{Support de } h_i^+ \text{ si } i \geqslant 2,$$

$$B_{2i} = \text{Support de } h_i^- \text{ si } i \geqslant 2,$$

h_l soit dans $X(B_l)$ et en outre on ait les conditions (a), (b), (c), (d), (e) décrites dan la première partie du théorème II.6 et la condition supplémentaire

$$(\omega_1) \qquad \left\| E^{\mathcal{B}_{l-1}}\left(\mathbf{1}_B \,|\, k_{n_i n_l}|\right)\right\|_\infty < \frac{\delta}{4^i} \qquad \forall i < l.$$

La construction étant faite jusqu'au rang $(l-1)$, B_l est parfaitement déterminé. On choisit n_l assez grand pour que (a) soit réalisé et aussi la condition (ω_1). En effet l'opérateur $E^{\mathcal{B}_{l-1}}$ est de rang fini et continu pour la topologie $\alpha(L^\infty, L^1)$. On utilise alors la condition $(*)$ pour justifier (ω_1). On fixe n_l et on choisit alors h_l dans $X(B_l)$

de façon à réaliser les conditions (b), (c), (d), (e). Cette construction a déjà été justifiée.

On pose comme au théorème II.6:

$$\varphi_i = E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_i}\right).$$

Si $f = \sum_i f_{n_i} e_{n_i}$ est un élément de F on pose

$$\Delta_{ij} = E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} f_{n_j}\right) \quad \text{et} \quad \Delta = \sum_i \left(\sum_j \Delta_{ij} - \varphi_i f_{n_i} \right) e_i.$$

Si nous montrons que $\|\Delta\| \leqslant \varepsilon \| f \|$, alors la démonstration s'achèvera comme dans le cas général et la construction de π est tout à fait semblable à celle du théorème II.6.

Evaluation de Δ_{ij} pour $j < i$. Le calcul fait au théorème II.6 reste valable dans ce cas car en utilisant (**) on a

$$\left|\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right| < \frac{\delta}{4^i} < \frac{\delta}{2^{i+j}} \quad \text{pour } i > j.$$

On obtient donc $\|\Delta_{ij}\| \leqslant \varepsilon \| f_{n_j} \| / 2^{i+j}$.

Evaluation de Δ_{ij} pour $j \geqslant i$. Le calcul fait dans le théorème II.6 nous donne

$$\Delta_{ij} = E_{ij} + f_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)$$

avec $\| E_{ij} \| \leqslant 6\delta_{ij} \| f_{n_j} \|$.

Il nous faut évaluer, $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})$. On ècrit pour cela

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) &= E^{\mathcal{B}_{j-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) + \left(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}}\right)\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) \\ &= E^{\mathcal{B}_{j-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) + \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\langle k_{n_i n_j} h_k \rangle}{P(B_k)} h_k. \end{aligned}$$

Si $j > i$ on utilise alors (ω_1) pour majorer la premier terme et (d) pour majorer le second. On obtient

$$\left\| E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) \right\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{4^i} + \frac{\delta_{ij}}{2^{j+1}} \leqslant \frac{\delta}{2^i} \quad \text{pour } j \geqslant i.$$

Cette majoration ne dépend que de i et n'est plus aussi bonne que dans le cas général. Cependant nous allons utiliser le fait que $X = l_1$ pour majorer la norme de $\sum_{j>i} \Delta_{ij}$

$$\sum_{j>i} \Delta_{ij} = \sum_{j>i} E_{ij} + \sum_{j>i} f_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right),$$

$$\left\| \sum_{j>i} E_{ij} \right\| \leqslant \sum_{j>i} 6\delta_{ij} \left\| f_{n_j} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2i+1}} \| f \|$$

si δ_{ij} est assez petit. D'autre part

$$\left| \sum_{j>i} f_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) \right| \leqslant \frac{\delta}{2^i} \sum_{j>i} |f_{n_j}|,$$

$$\left| \sum_{j>i} f_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) \right| \leqslant \frac{\delta}{2^i} \| f \|,$$

car on a

$$\left\| \sum_{j>i} |f_{n_j}| \right\|_p \leqslant \| f \|_{L^p(l_1)}.$$

On en déduit $\|\Sigma_{j>i}\Delta_{ij}\| \leqslant (\varepsilon/2^{2i+1} + \delta/2^i)\| f \|$. Si δ est assez petit $\|\Sigma_{j>i}\Delta_{ij}\| \leqslant \varepsilon\| f \|/2^{2i}$. Si $j = i$ on obtient facilement $\| \Delta_{ii} - \varphi_i f_{n_i} \| \leqslant \varepsilon\| f \|/2^{2i}$. On a donc

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij} - \varphi_i f_{n_i} \right\| \leqslant \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} + \frac{\varepsilon}{2^{2i}} \right] \| f \|,$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij} - \varphi_i f_{n_i} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i} \| f \|.$$

Par suite $\| \Delta \| \leqslant \varepsilon\| f \|$.

Ceci achève la démonstration du théorème dans le cas I.

DÉMONSTRATION DANS LE CAS II. Rappelons que dans ce cas on a, pour toute partie infinie I,

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = [0, 1] \quad \text{ps.}$$

En utilisant le corollaire I.11 on détermine une suite (n_i) et un ensemble B_1 de mesure supérieure à $(1 - \varepsilon/2)$ tel que

$$\left| k_{n_i n_j}(t) \right| < \frac{\delta}{4^i} \qquad \forall i > j \quad \text{et} \quad t \in B_1.$$

On détermine alors des entiers $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots$ tels que $B_2 = \bigcap_r \bigcup_{i=p_r}^{q_r} \Omega_{n_i}$ soit de mesure supérieure à $1 - \varepsilon/2$. En diminuant les ensembles Ω_{n_i} et en posant $\Omega_i = \Omega_{n_i} \cap B_1 \cap B_2$, on peut supposer que, pour tout r, $\{\Omega_i;\ p_r \leqslant i \leqslant q_r\}$ est une partition de $B_1 \cap B_2$.

On définit maintenant une suite dans $L^\infty(l_1)$ en posant

$$X^{(s)}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} X_r^{(s)}(t) e_r$$

avec $X_r^{(s)}(t) = \Sigma_{i=p_r}^{q_r} \Sigma_{j=p_s}^{q_s} k_{n_i n_j}(t) \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j}(t)$.

Si t est fixé, il existe un seul couple d'indices (i_r, j_s) tel que t soit dans $\Omega_{i_r} \cap \Omega_{j_s}$ et $p_r \leqslant i_r \leqslant q_r$, $p_s \leqslant j_s \leqslant q_s$ donc $| X_r^{(s)}(t) | = | k_{n_{i_r} n_{j_s}}(t) |$ et par suite

$$\| X^{(s)}(t) \|_{l_1} = \sum_{r=1}^{\infty} \left| k_{n_{i_r} n_{j_s}}(t) \right| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \left| k_{l, n_{j_s}}(t) \right|.$$

D'après la proposition I.10, ceci est majoré par $1 + \delta$. On peut donc trouver une suite $s'(r)$ telle que $X^{s'(r)}$ converge pour $\sigma(L^\infty(l_1), L^1(c_0))$ vers X^∞. Posons

$$X^\infty = \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r e_r, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} | \Phi_r | \leqslant 1 + \delta.$$

En extrayant une sous-suite de $s'(r)$ on peut supposer que sur un ensemble B de mesure positive, contenu dans $B_1 \cap B_2$ on a

$$\left| \Phi_{s'(r)}(t) \right| < \frac{\delta}{4^r} \qquad \forall t \in B, \forall r \geqslant 1.$$

En remplaçant maintenant Ω_i par $\Omega_i \cap B$ on a donc les deux propriétés suivantes

$$(***) \qquad \left\| \lim_{\substack{n\to\infty \\ \sigma(L^\infty L^1)}} \sum_{i=p_{s'(r)}}^{q_{s'(r)}} \sum_{j=p_{s'(r)}}^{q_{s'(n)}} k_{n_i n_j} \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j} \right\|_\infty < \frac{\delta}{4^r},$$

$$(****) \qquad \left| k_{n_i n_j}(t) \right| < \frac{\delta}{4^i} \qquad \forall i > j, \forall t \in B.$$

Nous allons maintenant procéder comme au §II, construire une suite $(s(r))$ extraite de $(s'(r))$, une suite h_r de fonctions sur B un sous-espace F_0 isomorphe à $L^p(l_1)$ et une application π de $L^p(l_1)$ sur F_0 telle que $\pi \circ T_{|F_0}$ soit un isomorphisme de F_0 sur F_0.

La construction de F_0, en supposant $(s(r))$ et (h_r) construites est tout à fait identique à celle du §II. Rappelons que

$$F_0 = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \lambda_r \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j};\ \lambda_r \in L^p(B, \mathfrak{B}) E^{\mathfrak{B}_r}(\lambda_r) = 0 \right\}$$

où $\mathfrak{B}_r$ est la σ-algèbre engendrée par $\{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$ et $\mathfrak{B}$ la σ-algèbre par la suite (h_n).

Construction de $s(r)$ et h_r. 1. On pose d'abord $s(1) = s'(1)$, $B_1 = B$ et $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2. Pour $l \geqslant 2$ on construit B_l, $s(l)$ et h_l de façon que $B_2 = B$,

$$B_{2i-1} = \text{support de } h_i^+ \text{ si } i \geqslant 2,$$
$$B_{2i} = \text{support de } h_i^- \text{ si } i \geqslant 2.$$

h_l est dans $X(B_l)$ pour $l \geqslant 2$ et qu'on ait les propriétés (a), (b), (c), (d), (e) décrites dans la seconde partie du théorème II.6 et en outre la propriété suivante

$$(\omega_2) \qquad \left\| E^{\mathfrak{B}_{l-1}} \left(\sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \sum_{j=p_{s(l)}}^{q_{s(l)}} k_{n_i n_j} \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j} \right) \right\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{4^r} \quad \text{pour } l > r.$$

Cette dernière condition est facilement réalisable car si on suppose $s(1), \ldots, s(l-1)$ fixés, on pourra choisir $s(l)$ assez grand de façon à réaliser (ω_2), en utilisant la propriété $(***)$.

Posons maintenant $\varphi_r = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \lambda_r \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j}$, $\varphi_r \geqslant (1-\delta)/2$. Donnons nous un élément f de F_0:

$$f = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \lambda_r \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j}.$$

On pose alors comme au paragraphe précédent

$$\Delta_{ij} = E^{\mathfrak{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i} T_{n_i n_j}(f_{n_j}) \right), \quad \Delta = \sum_{r=1}^{\infty} \Delta^{(r)} e_r,$$

avec

$$\Delta^{(r)} = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij} - \varphi_r \lambda_r.$$

Nous allons majorer la norme de Δ par $\varepsilon\|f\|$. La construction de l'opérateur π est alors tout a fait identique à celle du §II.

En gardant les mêmes notations nous avons

$$\Delta = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Delta^{r,n} - \varphi_r\lambda_r\right)e_r$$

avec

$$\Delta^{r,n} = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}}\sum_{j=p_{s(n)}}^{q_{s(n)}}\Delta_{ij}.$$

Evaluation de $\Delta^{r,n}$ pour $n < r$. Le calcul est tout à fait semblable à celui du chapitre II. On obtient

$$\Delta^{r,n} = \Delta^{r,n} - \lambda_n''\Phi^{(r,n)} + \lambda_n''\Phi^{(r,n)}$$

où $\lambda_n'' = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{r-1}})(\lambda_n)$

$$\Phi^{(r,n)} = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}}\sum_{j=p_{s(n)}}^{q_{s(n)}}E^{\mathcal{B}}\left(k_{n_in_j}\mathbf{1}_{\Omega_i\cap\Omega_j}\right).$$

Et en outre $\|\Delta^{r,n} - \lambda_n''\Phi^{(r,n)}\| \leqslant \varepsilon\|\lambda_n\|/2^{r+n+1}$.

Comme $n < r$, on a toujours $j < i$ dans les indices qui interviennent pour le terme $\Phi^{(r,n)}$, donc, en utilisant la propriété (****) on montre facilement que

$$\|\Phi^{(r,n)}\|_\infty < \frac{\delta}{4^r} \quad \text{pour } n < r.$$

Et par conséquent $\|\Delta^{(r,n)}\| < (\varepsilon/2^{r+n+1} + \delta/4^r)\|\lambda_n\| < \varepsilon\|\lambda_n\|/2^{r+n}$.

Evaluation de $\Delta^{(r,n)}$ pour $n \geqslant r$. Un calcul analogue au précédent nous permet d'écrire

$$\Delta^{(r,n)} = E^{(r,n)} + \lambda_n\Phi^{(r,n)}$$

avec $\|E^{(r,n)}\| < \varepsilon\|\lambda_n\|/2^{n+r+1}$.

Si $n = r$, comme $\Phi^{(r,r)} = \varphi_r$, cette majoration nous donne

$$\|\Delta^{r,r} - \varphi_r\lambda_r\| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{2r}}\|\lambda_r\|.$$

Si $n > r$, il nous faut majorer $\|\Phi^{(r,n)}\|_\infty$. Posons pour cela

$$A^{r,n} = \sum_{i=p_{s(r)}}^{q_{s(r)}}\sum_{j=p_{s(n)}}^{q_{s(n)}}\mathbf{1}_{\Omega_i\cap\Omega_j}k_{n_in_j}.$$

On a alors

$$\Phi^{(r,n)} = E^{\mathcal{B}}(A^{r,n}) = E^{\mathcal{B}_{n-1}}(A^{r,n}) + (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{n-1}})(A^{r,n}).$$

La condition (ω_2) nous donne

$$\|E^{\mathcal{B}_{n-1}}(A^{r,n})\|_\infty < \frac{\delta}{4^r} \quad \text{pour } n > r.$$

D'autre part on a

$$(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{n-1}})\big(k_{n_i n_j}\mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j}\big) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\langle k_{n_i n_j} h_k \rangle}{P(B_k)} h_k.$$

En utilisant la condition (d) on obtient

$$\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{n-1}})\big(k_{n_i n_j}\big)\|_\infty < \delta_{ij}.$$

Et par conséquent $\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{n-1}})(A^{r,n})\|_\infty < \delta_{r,n}$. On en déduit $\|\Phi^{(r,n)}\|_\infty \leqslant \delta/4^r + \delta_{r,n} < \delta/2^r$ pour $n > r$. On peut alors écrire

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} \Delta^{(r,n)} = \sum_{n=r+1}^{\infty} E^{(r,n)} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda_n \Phi^{(r,n)},$$

$$\left\| \sum_{n=r+1}^{\infty} E^{(r,n)} \right\| \leqslant \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{r+1}} \frac{\|\lambda_n\|}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2r+1}} \|f\|$$

et

$$\left| \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda_n \Phi^{(r,n)} \right| < \frac{\delta}{2^r} \sum_{n=r+1}^{\infty} |\lambda_n|,$$

donc

$$\left\| \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda_n \Phi^{r,n} \right\| < \frac{\delta}{2^r} \|f\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2r+1}} \|f\|.$$

En utilisant ici le fait que $X = l_1$ nous venons de montrer que

$$\left\| \sum_{n=r+1}^{\infty} \Delta^{(r,n)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{2r}} \|f\|.$$

On a donc

$$\Delta^{(r)} = \sum_{n=1}^{r-1} \Delta^{(r,n)} + \big(\Delta^{(r,r)} - \varphi_r \lambda_r\big) + \sum_{n=r+1}^{\infty} \Delta^{(r,n)},$$

$$\|\Delta^{(r)}\| \leqslant \sum_{n=1}^{r} \frac{\varepsilon}{2^{r+n}} \|f\| + \frac{\varepsilon}{2^{2r}} \|f\| = \frac{\varepsilon}{2^r} \|f\|$$

et par suite $\|\Delta\| < \varepsilon \|f\|$.

Cette majoration termine la démonstration du théorème, puisque nous avons déjà remarqué qu'elle est suffisante pour pouvoir construire l'opérateur π comme au thèoréme II.6.

Nous pouvons maintenant énoncer

THÉORÈME III.2. *Pour $p \geqslant 1$ l'espace $L^p(l_1)$ est primaire.*

DÉMONSTRATION. Pour $p = 1$, il est isomorphe à L^1 qui est primaire [**5**].Pour $p > 1$ on utilise théorème III.1 et le raisonnement du théorème II.7. C.Q.F.D.

Montrons maintenant que pour tout $p > 1$, l'espace $L^p(c_0)$ est primaire. Cette question est naturellement posée dès que l'on montré que, pour $p > 1$, c_0 vérifie la propriété $\mathcal{P}_p$, lorsqu'on considère la base canonique de c_0.

PROPOSITION III.3. *Pour $p > 1$, l'espace c_0 vérifie la propriété $\mathcal{P}_p$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f = \sum_n f_n e_n$ un élément de $L^p(c_0)$.

$$\|f\| = \left\| \sup_n |f_n| \right\|_{L^p}.$$

Donnons nous une suite croissante a_n de sous σ-algèbres de l'algèbre $\mathcal{A}$ des ensembles mesurables sur [01]. Posons

$$\gamma = \sup_n |f_n| \quad \text{et} \quad \gamma^* = \sup_k E^{a_k}\gamma.$$

On a alors d'après un lemme démontre dans [**2**]

$$\|\gamma^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|\gamma\|.$$

Or

$$\left\| \sum_n E^{a_n} f_n e_n \right\|_{L^p(c_0)} \leqslant \left\| \sum_n E^{a_n} \gamma e_n \right\|_{L^p(c_0)} = \|\gamma^*\|_p.$$

On a donc

$$\left\| \sum_n E^{a_n} f_n e_n \right\|_{L^p(c_0)} \leqslant \frac{p}{p-1} \left\| \sum_n f_n e_n \right\|_{L^p(c_o)}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous pouvons donc nous demander si l'espace $L^p(c_0)$ est primaire. Nous allons voir en effet que nous avons des résultats analogues à ceux du §II, bien que les calculs ne soient plus valables.

THÉORÈME III.4. *Soit T un opérateur de $L^p(c_0)$ dans lui-même, $1 < p < \infty$, alors l'un des deux espaces* $(\operatorname{Im} T)$ *ou* $\operatorname{Im}(I - T)$ *contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(c_0)$.*

DÉMONSTRATION. Comme au théorème II.6 on construit les deux matrices (k_{ij}) et (k'_{ij}) et les ensembles Ω_i et Ω'_i correspondants.

Il y a de nouveau deux cas à envisager.

DÉMONSTRATION DANS LE CAS I. On suppose, dans ce cas, qu'il existe une partie infinie I de $\mathbf{N}$ telle que $\bigcap_{i\in I}\Omega_i$ soit de mesure positive. La proposition II.5 n'est plus valable, cependant la première partie du corollaire I.11 nous permet de trouver une suite (n'_i) de I et un ensemble A_1 de mesure positive, contenu dans $\bigcap_{i\in I}\Omega_i$ tels que

$$|k_{n'_i,n'_j}(t)| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \quad \text{si } i < j \quad \text{et} \quad t \in A_1,$$

$$|k_{n'_i,n'_i}(t)| \geqslant \frac{1-\delta}{2} \quad \text{si } t \in A_1.$$

Si (e_j^*) désigne la suite biorthogonale à la base canonique de c_0, c'est-à-dire la base canonique de l_1, nous posons

$$X^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{n'_i,n'_j}(t) e_j^*.$$

D'après la proposition I.10, on sait que $\| X^{(l)}(t)\|_{l_1} \leqslant 1 + \delta$ si on suppose que T est de norme 1 et $\Sigma_{ij}\delta_{ij} \leqslant \delta$. On peut donc trouver une suite $l(n)$ telle que $X^{l(n)}$ converge vers X^∞ pour la topologie $\sigma(L^\infty(l_1), L^1(c_0))$.

Soit $X^\infty = \Sigma_{j=1}^\infty \Phi_j e_j^*$, avec $\Sigma_{j=1}^\infty |\Phi_j| \leqslant 1 + \delta$.

En extrayant au besoin une sous-suite de $l(n)$, on peut trouver un ensemble B de mesure positive, contenu dans A_1, tel que

$$|\Phi_{l(j)}(t)| < \frac{\delta}{4^j} \quad \text{si } t \in B.$$

En posant alors $n_j'' = n'_{l(j)}$ on a

$$\lim_{i\to\infty} k_{n_i'', n_j''} = \Phi_{l(j)}.$$

On a donc les deux propriétés suivantes

$$(\blacktriangle) \qquad \left\| \lim_{\substack{i\to\infty \\ \sigma(L^\infty L^1)}} k_{n_i'' n_j''} \right\|_\infty < \frac{\delta}{4^j} \quad \text{sur } B,$$

$$(\blacktriangle\blacktriangle) \qquad \left| k_{n_i'' n_j''}(t) \right| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \quad \text{si } i < j \text{ et si } t \in B.$$

Nous allons maintenant reprendre la démonstration faite dans la première partie du théorème II.6.

En gardant les mêmes notations, il s'agit de construire la suite (n_l), la suite (h_l), l'espace F isomorphe à $L^p(c_0)$ et l'opérateur π de $L^p(c_0)$ dans F.

Si nous supposons (n_l) et (h_l) construites, la description de F est la même qu'au théorème II.6.

Construction de (n_l) *et* (h_l). 1. On pose $n_1 = n_1''$, $B_1 = B$, $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2. Pour $l \geqslant 2$, on pose $B_2 = B$,

$$B_{2i-1} = \text{support de } h_i^+ \text{ si } i \geqslant 2,$$
$$B_{2i} = \text{support de } h_i^- \text{ si } i \geqslant 2,$$

h_l sera un élément de $X(B_l)$ pour $l \geqslant 2$ et les propriétés (a), (b), (c), (d), (e) de la première partie de la démonstration du théorème II.6 devront être vérifiées et aussi la condition suivante

$$(\omega_1') \qquad \left\| E^{\mathcal{B}_{l-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_l n_j}\right) \right\|_\infty < \frac{\delta}{4^j} \quad \text{si } j < l.$$

Si on suppose la construction faite jusqu'au rang $(l-1)$ de (h_i) et (n_i), alors on peut facilement choisir n_l assez grand pour réaliser (a) et (ω_1') en utilisant la propriété $(\blacktriangle)$.

La construction de h_l se fait comme au théorème II.6.

Donnons nous maintenant un élément de F, soit $f = \Sigma_{j=1}^\infty f_{n_j} e_{n_j}$, et posons

$$\Delta_{ij} = E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{B}} T_{n_i n_j}\left(f_{n_j}\right)\right),$$
$$\varphi_i = E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_i}\right),$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij} - \varphi_i f_{n_i} \right) e_{n_i}.$$

Pour achever la première partie de la démonstration il nous suffit de montrer qu'on peut réaliser $\|\Delta\| < \varepsilon \| f \|$. La construction de l'opérateur π tel que $\pi \circ T_{|F}$ soit un isomorphisme de F sur F se fait alors comme dans le théorème II.6 et ne s'appuie que sur cette majoration et la propriété $\mathcal{P}_p$.

Evaluation de Δ_{ij} pour $j \geqslant i$. En supposant d'abord $f_{n_j} = h_l$, avec $l \geqslant j$, on peut refaire le même calcul qu'au théorème II.6 et on obtient

$$\Delta_{ij} = E_{ij} + f_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)$$

avec $\|E_{ij}\| \leqslant 6\delta_{ij} \| f_{n_j} \|$. Si $j = i$ on obtient $\|\Delta_{ii} - \varphi_i f_{n_i}\| < \varepsilon \| f_{n_i} \| / 2^{2i+1}$. Si $j > i$, on obtient en utilisant (▲▲)

$$\|\Delta_{ij}\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+j+1}} \| f_{n_j} \|.$$

Evaluation de Δ_{ij} pour $j < i$. On fait un calcul analogue à celui du théorème II.6 et on obtient

$$\Delta_{ij} = E_{ij} + f''_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)$$

avec $f''_{n_j} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(f_{n_j})$ et $\|E_{ij}\| \leqslant 6\delta_{ij} \| f_{n_j} \|$. Nous avons

$$E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) = E^{\mathcal{B}_{i-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) + \left(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}}\right)\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right).$$

Or $\|E^{\mathcal{B}_{i-1}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})\|_\infty < \delta/4^j$ si $i > j$ d'après (▲) et $\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})\|_\infty < \sum_{k=i}^{\infty} \delta_{ij}/2^{k+2} < \delta_{ij}/2^{i+1}$ par (d) donc $\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})\|_\infty < \delta/4^j + \delta_{ij}/2^{i+1} < \delta/2^j$ pour $j < i$. Cette majoration ne dépend pas de i et nous devons, pour majorer Δ, majorer directement l'expression $E = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{ij} e_{n_i}$

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} E_{ij} e_{n_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} f''_{n_j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) e_{n_i}.$$

On a $\|\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} E_{ij} e_{n_i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} 6\delta_{ij} \| f \| \leqslant \varepsilon \| f \| / 4$ si δ_{ij} est assez petit. D'autre part $f''_{n_j} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}}) f_{n_j}$. Si on pose $\gamma = \sup_j |f_{n_j}|$, qui est un élément de L^p car $\gamma = \| f \|_{c_0}$, alors on sait, voir par exemple [1], que $\gamma^* = \sup_i E^{\mathcal{B}_i} \gamma$ est aussi dans L^p on a

$$\left| f''_{n_j} \right| \leqslant \gamma + \gamma^*.$$

On a donc $| \sum_{j=1}^{i-1} f''_{n_j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}) | \leqslant (\gamma + \gamma^*) \sum_{j=1}^{i-1} \delta/2^j \leqslant \delta(\gamma + \gamma^*)$.

La norme dans c_0 du second terme de la somme E est donc majorée par $\delta(\gamma + \gamma^*)$. On a donc

$$\begin{aligned} \| E \|_{L^p(c_0)} &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \| f \| + \delta \| \gamma \|_{L^p} + \delta \| \gamma^* \|_{L^p} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \| f \| + \delta \| f \| + \delta \frac{p}{p-1} \| f \| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \| f \| \quad \text{si } \delta \text{ est assez petit.} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire

$$\Delta = E + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\Delta_{ii} - \varphi_i f_{n_i}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \Delta_{ij},$$

$$\|\Delta\| < \frac{\varepsilon}{2}\|f\| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+j+1}}\|f\| = \varepsilon\|f\|.$$

Cette majoration achève la première partie de la démonstration.

Démonstration dans le cas II. On suppose dans ce cas que pour toute partie infinie I de $\mathbf{N}$ on a $\bigcap_{i\in I}\Omega_i' = \bigcap_{i\in I}\Omega_i = \varnothing$ ps.

On détermine d'abord une suite (n_i) et un ensemble B_1 ce mesure supérieure à $(1 - \varepsilon/2)$ tels que

$$|k_{n_i n_j}(t)| < \frac{\delta}{4^j} \quad \text{si } t \in B_1 \quad \text{et} \quad i < j.$$

On utilise pour cela le corollaire I.11. On détermine ensuite des entiers $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ tels que

$$B_2 = \bigcap_n \bigcup_{i=p_n}^{q_n} \Omega_{n_i} \quad \text{soit de mesure supérieure à } 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En diminuant les ensembles Ω_{n_i} et en posant $\Omega_i = \Omega_{n_i} \cap B_1 \cap B_2$ on peut supposer que pour tout n, $\{\Omega_i,\ p_n \leqslant i \leqslant q_n\}$ forme une partition de $B_1 \cap B_2$. On définit alors une suite bornée dans $L^\infty(l_1)$ en posant

$$X^r(t) = \sum_{s=1}^{\infty} X_s^r(t) e_s^*.$$

(e_s^*) désigne la base canonique de l_1 et

$$X_s^r(t) = \sum_{i=p_r}^{q_r} \sum_{j=p_s}^{q_s} \left|k_{n_i n_j}(t)\right| \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j}(t).$$

On montre facilement que $\|X^r(t)\|_{l_1} \leqslant 1 + \delta$ et on peut donc trouver une sous-suite $r'(l)$ telle que

$$\lim_{l\to\infty} X^{r'(l)} = X^\infty \quad \text{pour } \sigma\left(L^\infty(l_1), L^1(c_0)\right)$$

avec $X^\infty = \sum_{s=1}^\infty \Phi_s e_s^*$ et $\sum_{s=1}^\infty |\Phi_s| \leqslant 1 + \delta$.

En extrayant une sous-suite de $r'(l)$, on peut supposer que sur un ensemble B de mesure positive contenu dans $B_1 \cap B_2$ on a

$$\left|\Phi_{r'(l)}(t)\right| < \frac{\delta}{4^l} \qquad \forall t \in B.$$

En remplaçant maintenant Ω_i par $\Omega_i \cap B$ on a donc les deux propriétés suivantes

$$(\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle) \qquad \left\| \lim_{\substack{n\to\infty \\ \sigma(L^\infty L^1)}} \sum_{j=p_{r'(l)}}^{q_{r'(l)}} \sum_{i=p_{r'(n)}}^{q_{r'(n)}} |k_{n_i n_j}|\, \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j} \right\|_\infty < \frac{\delta}{4^l},$$

$$(\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle) \qquad |k_{n_i n_j}(t)| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \quad \text{si } j > i \quad \text{et} \quad t \in B.$$

Il s'agit maintenant de construire la suite $(r(l))$ extraite de $(r'(l))$, la suite (h_l) de fonctions sur B, le sous-espace F_0 et l'opérateur π, exactment comme au théorème II.6.

La description de F_0 est tout à fait identique à celle du théorème II.6.

Construction de $(r(l))$ *et* (h_l). 1. On pose $r(1) = r'(1)$, $B_1 = B$ et $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2. Pour $l \geqslant 2$ on définit B_l par:

$$B_2 = \mathbf{1}_B,$$
$$B_{2i-1} = \text{support de } h_i^+ \text{ si } i \geqslant 2,$$
$$B_{2i} = \text{support de } h_i^- \text{ si } i \geqslant 2.$$

h_l sera un élément de $X(B_l)$ pour $l \geqslant 2$.

En outre $r(l)$ et h_l seront choisis de façon à réaliser les propriétés (a), (b), (c), (d), (e) de la seconde partie du théorème II.6 et en outre la propriété (ω_2')

$$(\omega_2') \qquad \left\| E^{\mathcal{B}_{l-1}}\left(\sum_{j=p_{r(s)}}^{q_{r(s)}} \sum_{i=p_{r(l)}}^{q_{r(l)}} k_{n_i n_j} \mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j} \right) \right\|_\infty < \frac{\delta}{4^s} \quad \text{pour } s < l.$$

Si on suppose la construction de (h_i) et $(r(i))$ pour $i \leqslant l-1$, on choisit $r(l)$ assez grand pour réaliser (a) et (ω_2'), en utilisant la propriété (▲▲▲). On choisit ensuite h_l de façon à réaliser les conditions (b), (c), (d), (e). Cette construction étant faite on pose

$$\varphi_s = \sum_{i=p_{r(s)}}^{q_{r(s)}} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i} k_{n_i n_j}\right).$$

On se donne ensuite un élément f de F_0

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=p_{r(s)}}^{q_{r(s)}} \lambda_s \mathbf{1}_{\Omega_j} e_{n_j}$$

et on pose $\Delta_{ij} = E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\Omega_i} T_{n_i n_j}(f_{n_j}))$ où $f_{n_j} = \lambda_s \mathbf{1}_{\Omega_j}$ si $p_{r(s)} \leqslant j \leqslant q_{r(s)}$. On pose alors $\Delta = \sum_{s=1}^{\infty}[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{s,n} - \varphi_s \lambda_s] e_s$ où $\Delta^{(s,n)} = \sum_{i=p_{r(s)}}^{q_{r(s)}} \sum_{j=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} \Delta_{ij}$.

Nous allons majorer Δ par $\varepsilon \| f \|$. Cette majoration sera suffisante pour construire, comme dans la seconde partie du théorème II.6, l'opérateur π tel que $\pi \circ T_{|F_0}$ soit un isomorphisme de F_0 sur F_0.

Evaluation de $\Delta^{(s,n)}$ *pour* $n \geqslant s$. En raisonnant comme au §II et en utilisant (▲▲▲▲) on obtient facilement

$$\| \Delta^{s,n} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{s+n}} \| \lambda_n \| \quad \text{si } n > s, \quad \| \Delta^{ss} - \varphi_s \lambda_s \| < \frac{\varepsilon}{2^{2s}} \| \lambda_s \|.$$

Evaluation de $\Delta^{s,n}$ *pour* $n < s$. Comme au théorème II.6 on montre que

$$\| \Delta^{s,n} - \lambda_n'' \Phi^{(s,n)} \| < \frac{\varepsilon}{2^{n+s+2}} \| \lambda_n \|$$

où $\lambda_n'' = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{s-1}})(\lambda_n)$

$$\Phi^{(s,n)} = \sum_{i=p_{r(s)}}^{q_{r(s)}} \sum_{j=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_{\Omega_i \cap \Omega_j} k_{n_i n_j}\right).$$

En utilisant (▲▲▲) on montre que $\|\Phi^{(s,n)}\|_\infty < \delta/2^n$ si $s > n$. Pour majorer Δ il nous faut majorer directement

$$E = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{s-1} \Delta^{(s,n)} e_s.$$

En posant $\gamma = \sup_i |\lambda_i|$ et $\gamma^* = \sup_k |E^k \gamma|$. On montre que $\sup_s |\sum_{n=1}^{s-1} \lambda_n'' \Phi^{(s,n)}| \leqslant \delta(\gamma + \gamma^*)$. Ceci permet d'obtenir, si δ, est assez petit

$$\|E\| < \frac{\varepsilon}{2} \|f\|.$$

On peut alors écrire

$$\Delta = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{s-1} \Delta^{(s,n)} e_s + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\Delta^{(s,s)} - \varphi_s \lambda_s\right) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=s+1}^{\infty} \Delta^{(s,n)} e_s.$$

On obtient

$$\|\Delta\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|f\| + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+s+1}} = \varepsilon \|f\|.$$

Cette majoration achève la démonstration du théorème III.4. Nous pouvons alors énoncer le résultat final.

THÉORÈME III.5. *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(c_0)$ est primaire.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème III.4.

Pour conclure cette étude nous allons montrer par un exemple que les espaces c_0 et l_r, $1 < r < \infty$, ne vérifient pas la propriété $\mathcal{P}_1$ et ne rentrent donc pas dans le cadre de cette étude.

PROPOSITION III.6. *Les espaces c_0 et l_r, $1 < r < \infty$, ne vérifient pas la propriété $\mathcal{P}_1$.*

DÉMONSTRATION. Chacun des espaces est évidemment muni de sa base canonique (e_i).

Posons $A_k = [0; 1/2^k]$; c'est un atome de la tribu $\mathcal{B}_{2^{k-1}+1}$. On choisit dans $A_k \setminus A_{k+1}$ un intervalle I_k de longueur $1/k^2 2^k$. Ceci est possible pour $k \geqslant 2$. On pose alors

$$\gamma_n(t) = \sum_{j \geqslant k} 2^j \mathbf{1}_{I_j} \quad \text{si } n = 2^{k-1} + 1,\ k \geqslant 2,$$

$\gamma_n(t) = 0$ si n n'est pas de la forme $2^{k-1} + 1$, $k \geqslant 2$. L'espérance conditionnelle $(E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n)$ est nulle en dehors de A_k et sur A_k elle est constante et a pour valeur $(1/P(A_k)) \int_{A_k} \gamma_n$. On a donc

$$E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n = 2^k \left(\sum_{j \geqslant k} \int_{I_j} 2^j \right) \mathbf{1}_{A_k} = 2^k \left(\sum_{j \geqslant k} \frac{1}{j^2} \right) \mathbf{1}_{A_k},$$

$$E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n \geqslant 2^k \int_k^\infty \frac{dt}{t^2} \mathbf{1}_{A_k} = \frac{2^k}{k} \mathbf{1}_{A_k}.$$

Evaluons d'abord les normes de $\Sigma_n \gamma_n e_n$ et $\Sigma_n E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n e_n$ dans $L^1(c_0)$.

$$\left\| \sum_n \gamma_n(t) e_n \right\|_\infty = \sup_n |\gamma_n(t)|.$$

Sur l'intervalle I_j on a soit $\gamma_n(t) = 0$, soit $\gamma_n(t) = 2^j$ si n est de la forme $2^{k-1} + 1$ et $j \geqslant k$. On a donc

$$\sup_n |\gamma_n(t)| = \sum_{j=2}^{\infty} 2^j \mathbf{1}_{I_j},$$

$$\int \sup_n |\gamma_n(t)| = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \left\| \sum_n \gamma_n e_n \right\|_{L^1(c_0)}.$$

D'autre part si n est de la forme $2^{k-1} + 1$, $k \geqslant 2$, on a

$$E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n \geqslant \frac{2^k}{k} \mathbf{1}_{A_k}$$

donc

$$\sup_n |E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n| \geqslant \sup_{k \geqslant 2} \frac{2^k}{k} \mathbf{1}_{A_k \setminus A_{k+1}} = \sum_{k \geqslant 2} \frac{2^k}{k} \mathbf{1}_{A_k \setminus A_{k+1}}.$$

On a alors

$$\int \sup_n |E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n| \geqslant \sum_{k \geqslant 2} \frac{2^k}{k} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{2k} = +\infty.$$

Ceci montre que c_0 ne vérifie pas $\mathcal{P}_1$.

Evaluons maintenant les normes dans $L^1(l_r)$

$$\left(\sum_n |\gamma_n(t)|^r \right)^{1/r} = \left[\sum_{k \geqslant 2} \left(\sum_{j \geqslant k} 2^j \mathbf{1}_{I_j} \right)^r \right]^{1/r}.$$

Comme les I_j sont disjoints, la puissance $r$ième de la somme $\Sigma_{j \geqslant k} 2^j \mathbf{1}_{I_j}$ est aussi la somme des puissances $r$ième. On a donc

$$\left(\sum_n |\gamma_n(t)|^r \right)^{1/r} = \left(\sum_{k \geqslant 2} \sum_{j \geqslant k} 2^{jr} \mathbf{1}_{I_j} \right)^{1/r} = \left(\sum_{j \geqslant 2} \sum_{k=1}^{j} 2^{jr} \mathbf{1}_{I_j} \right)^{1/r} = \left(\sum_{j \geqslant 2} j 2^{jr} \mathbf{1}_{I_j} \right)^{1/r}$$
$$= \sum_{j \geqslant 2} j^{1/r} 2^j \mathbf{1}_{I_j}.$$

En intégrant on obtient

$$\left\| \sum \gamma_n e_n \right\|_{L^1(l_r)} = \sum_{j \geqslant 2} \frac{j^{1/r}}{j^2} = \sum_{j \geqslant 2} \frac{1}{j^{2-1/r}}.$$

Or $r > 1$ donc $2 - 1/r > 1$ et cette série converge. Evaluons maintenant $(E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n)$

$$\left(\sum_n |E^{\mathcal{B}_n} \gamma_n|^r \right)^{1/r} \geqslant \left(\sum_{k \geqslant 2} \frac{2^{kr}}{k^r} \mathbf{1}_{A_k} \right)^{1/r}.$$

Sur $A_k \setminus A_{k+1}$, interviennent seulement les coefficients de $\mathbf{1}_{A_2}, \mathbf{1}_{A_3}, \ldots, \mathbf{1}_{A_k}$. On a donc

$$\left(\sum_n \left|E^{\mathcal{B}_n}\gamma_n\right|^r\right)^{1/r} \geqslant \left[\sum_{k\geqslant 2} \mathbf{1}_{A_k\setminus A_{k+1}}\left(\frac{2^r}{1^r}+\frac{2^{2r}}{2^r}+\cdots+\frac{2^{kr}}{k^r}\right)\right]^{1/r}.$$

Les $A_k \setminus A_{k+1}$ étant disjoints cette dernière expression est égale à

$$\sum_{k\geqslant 2} \mathbf{1}_{A_k\setminus A_{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{2^{jr}}{j^r}\right)^{1/r}.$$

On a donc

$$\left\|\sum_n E^{\mathcal{B}_n}\gamma_n e_n\right\|_{L^1(l_r)} \geqslant \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{2^{jr}}{j^r}\right)^{1/r} \geqslant \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{2^{jr}}{k^r}\right)^{1/r}$$

$$= \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\cdot 2^{k+1}}\left(2^r\frac{2^{kr}-1}{2^r-1}\right)^{1/r} = \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\cdot 2^k}\frac{(2^{kr}-1)^{1/r}}{(2^r-1)^{1/r}}.$$

Or $(2^{kr}-1)^{1/r} \geqslant 2^k/2^{1/r}$ donc

$$\left\|\sum_n E^{\mathcal{B}_n}\gamma_n e_n\right\|_{L^1(l_r)} \geqslant \frac{1}{2^{1/r}(2^r-1)^{1/r}}\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k} = +\infty.$$

L'espace l_r ne possède donc pas la propriété $\mathcal{P}_1$.

IV. Primarité de $L^p(X)$ lorsque X ne vérifie pas $\mathcal{P}_p$.

IV.1. *Simplification du problème.* Le but de cette étude est de démontrer le théorème fondamental suivant

THÉORÈME IV.1.1. *Soit X un Banach à base symétrique, ne vérifiant pas $\mathcal{P}_p$, et T un opérateur de $L^p(X)$, alors l'un des deux espaces* $(\operatorname{Im} T)$ *ou* $\operatorname{Im}(I-T)$ *contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(X)$.*

Nous allons dans ce paragraphe, montrer qu'on peut se ramener à un énoncé analogue pour les seuls opérateurs diagonaux.

Si T est un opérateur de $L^p(X)$, il est défini par les opérateurs $T_{ij} = Q_i \circ T \circ U_j$. On dit que T est diagonal si $T_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Nous allons démontrer un lemme qui éclairera la suite

LEMME IV.1.2. *Soit T un opérateur (borné) de $L^p(X)$, posons $D = \Sigma_{i\geqslant 1} u_i \circ Q_i \circ T \circ Q_i$, D est un opérateur borné et $\|D\| \leqslant \|T\|$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour toute suite finit $(f_n)_{n\leqslant N}$ d'éléments de L^p on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} T_{ii}(f_i)e_i\right\| \leqslant \|T\|\left\|\sum_{i=1}^{N} f_i e_i\right\|.$$

Posons $\varphi^{(1)}(\Sigma_{n\geqslant 1} f_n e_n) = f_1e_1 - f_2e_2 - f_3e_3 - \cdots$.

La base étant inconditionnelle de constante 1 on a $\|\varphi^{(1)}\| = 1$ (en fait $\varphi^{(1)}$ est une isométrie si la base est symétrique). On a donc

$$\|\varphi^{(1)} \circ T \circ \varphi^{(1)}\| \leqslant \|T\|.$$

Il est facile de voir que la "matrice" associée à $\varphi^{(1)} \circ T \circ \varphi^{(1)}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} T_{11}, & -T_{12}, & -T_{13}, & \cdots \\ -T_{21}, & T_{22}, & T_{23}, & \cdots \\ -T_{31} & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix},$$

donc l'opérateur $T^{(1)} = (T + \varphi^{(1)} \circ T \circ \varphi^{(1)})/2$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & T_{22} & T_{23} & T_{24} & \\ 0 & T_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

et $\|T^{(1)}\| \leqslant \|T\|$. On recommence sur $T^{(1)}$ avec $\varphi^{(2)}(\Sigma_{n\geqslant 1}\lambda_n e_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3 \cdots$. On montre ainsi que l'opérateur $T^{(N)}$ vérifie $\|T^{(N)}\| \leqslant \|T\|$ et a pour matrice

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 & \cdots & & & & & \\ 0 & T_{22} & & & & & & & \\ & & \ddots & T_{NN} & 0 & 0 & \cdots & & \\ & & & 0 & T_{N+1,N+1} & & & T_{N+1,N+2} & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

donc $\|\Sigma_{i=1}^N T_{ii}(f_i)e_i\| = \|T^{(N)}(\Sigma_{i=1}^N f_i e_i)\| \leqslant \|T\|\,\|\Sigma_{i=1}^N f_i e_i\|$. C.Q.F.D.

Désignons par $L_0^p(X)$ le sous-espace de $L^p(X)$ formé des fonctions d'intégrale nulle.

PROPOSITION IV.1.3. *$L_0^p(X)$ est isomorphe à $L^p(X)$.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Nous allons voir comment le théorème IV.1.1 se ramène à la démonstration de deux théorèmes distincts.

THÉORÈME IV.1.4. *Soit T un opérateur de $L^p(X)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un ensemble mesurable B, une σ-algèbre $\mathfrak{B}$ sur B, une suite d'entiers (n_i) strictement croissante tels que*

(a) *Si $\tilde{X}$ désigne l'espace engendré par la suite (e_{n_i}), $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ est isométrique à $L^p(X)$.*

(b) *Si π_0 désigne la projection de L^p sur $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ définie par*

$$\pi_0\Big(\sum_n f_n e_n\Big) = \sum_i E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B f_{n_i})e_{n_i}$$

est si D est l'opérateur diagonal $D = \Sigma_{i\geqslant 1} u_i \circ Q_i \circ T \circ Q_i$ alors

$$\|\pi_0 Tf - \pi_0 Df\| < \varepsilon\|f\| \quad \textit{pour tout } f \textit{ dans } L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X}).$$

REMARQUE. Nous savons, par le lemme IV.1.2, que D est borné. Mais ceci n'est pas nécessaire ici, il résulte de ce théorème que $\pi_0 \circ D$ est borné en tant qu'opérateur de $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ dans lui-même.

THÉORÈME IV.1.5. *Soit T un opérateur diagonal de $L^p(X)$ et $\varepsilon > 0$, il existe alors un ensemble mesurable B, une σ-algèbre $\mathfrak{B}$ sur B et une suite strictement croissante d'entiers (n_i) telle que si $\tilde{X}$ désigne l'espace engendré par la suite $(e_{n_i})_{i \geqslant 2}$ on ait*

(a) *$L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ est isométrique à $L^p(X)$.*

(b) *Il existe un sous-espace F de $L^p(X)$ isométrique à $L_0^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ et un opérateur π_1 de $L^p(X)$ dans F tel que $\|\pi_1\| \leqslant 8$ et*

(b′) *$\|\pi_1 \circ Tf - f\| < \varepsilon \|f\|$ pour tout f dans F, ou*

(b″) *$\|\pi_1 \circ (I - T)(f) - f\| < \varepsilon \|f\|$ pour tout f dans F.*

On va utiliser ces deux théorèmes pour démontrer le théorème IV.1.1. On applique le théorème IV.1.3 et on trouve donc, B, $\mathfrak{B}$ et $\tilde{X}$ tel que

$$\|\pi_0 \circ Tf - \pi_0 \circ Df\| < \varepsilon \|f\| \qquad \forall f \in L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X}).$$

On applique ensuite le théorème IV.1.5 à l'opérateur $(\pi_0 \circ D)$ restreint à $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$. On peut donc trouver $C \subset B$, $\mathcal{C} \subset \mathfrak{B}$ et $\tilde{\tilde{X}} \subset \tilde{X}$ tel que $L^p(C, \mathcal{C}, \tilde{\tilde{X}})$ soit isométrique à $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ donc à $L^p(X)$; l'espace F donné par (b) est isométrique à $L_0^p(C, \mathcal{C}, \tilde{\tilde{X}})$ donc isomorphe à $L^p(X)$ d'après la proposition IV.1.3. Posons maintenant

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_0.$$

C'est un epérateur de $L^p(X)$ dans F et on a, pour f dans F

$$\|\pi Tf - f\| \leqslant 8\|\pi_0 Tf - \pi_0 Df\| + \|\pi_1 \circ (\pi_0 Df) - f\|.$$

Si (b′) est réalisée pour $\pi_0 \circ D$ on a

$$\|\pi \circ Tf - f\| \leqslant 9\varepsilon \|f\|.$$

Si (b″) est réalisée alors on a: $\|\pi_1 \circ (I - \pi_0 \circ D)f - f\| < \varepsilon \|f\|$

$$\begin{aligned} \|\pi \circ (I - T)f - f\| &\leqslant 8\|\pi_0 \circ (I - T)f - \pi_0 \circ (I - D)f\| \\ &\quad + \|\pi_1 \circ \pi_0 \circ (I - D)f - f\| \\ &\leqslant 8\varepsilon \|f\| + \|\pi_1 \circ \pi_0 \circ (I - D)f - f\|. \end{aligned}$$

Or si f est dans F, $\pi_0 f = f$, donc $\pi_1 \circ \pi_0 \circ (I - D)f = \pi_1 \circ (I - \pi_0 \circ D)f$.

On en déduit encore $\|\pi \circ Tf - f\| \leqslant 9\varepsilon \|f\|$.

On voit facilement d'après cette inégalité, si $9\varepsilon < 1$, que si on est par exemple dans le premier cas $\pi \circ T_{|F}$ est un isomorphisme de F sur F et par conséquent TF est isomorphe à F, donc a $L^p(X)$ d'après la proposition IX.I.3. De plus $Q = (\pi|_{TF})^{-1} \circ \pi$ est une projection de $L^p(X)$ sur TF. Ceci achève donc la démonstration du théorème IV.1.1. Dans les 2 paragraphes suivants nous démontrerons les théorèmes IV.1.4 et IV.1.5.

IV.2. *Demonstration du théorème* IV.I.4. On se donne $\varepsilon > 0$ et un opérateur T. L'énoncé du théorème montre qu'on peut, en changeant au besoin ε, supposer que $\|T\| = 1$.

Notons T_{ij} l'opérateur $Q_i \circ T \circ U_j$. On se donne des nombres $\delta > 0$ et $\delta_{ij} > 0$ assez petits devant ε. On applique alors les résultats du §I pour construire des mesures (θ_{ij}) associées à l'opérateur T et aux nombres δ_{ij}. Nous savons d'après le §I que ces mesures sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et si

$\theta_{ij} = k_{ij}P$ on a, pour tout entier N:

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} k_{ij} e_i \right\|_X \leqslant 1 + \delta \text{ ps}, \quad \text{si } \sum_{i,j} \delta_{ij} \leqslant \delta$$

et

$$\left\| \sum_{j=1} k_{ij} e_j^* \right\|_{X^*} \leqslant 1 + \delta \text{ ps}, \quad \text{si } \sum_{i,j} \delta_{ij} \leqslant \delta.$$

Puisque X n'est pas isomorphe à l_1, on a d'après [**1**],

$$\lim_{j \to \infty} k_{ij} = 0 \quad \text{en probabilité.}$$

Nous devrons distinguer deux cas suivant que X est isomorphe ou non à c_0.

Cas I. *X non isomorphe à c_0*. On a alors également $\lim_{i \to +\infty} k_{ij} = 0$ en probabilité. On peut donc facilement trouver un ensemble mesurable B de mesure positive et une suite (n_i') d'entiers telle que

$$\left| k_{n_i', n_j'}(t) \right| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \qquad \forall t \in B, \forall i \neq j.$$

Avant de procéder à la construction de $\mathfrak{B}$ et de la suite (n_i) nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME IV.2.1. *Pour tout i fixé et h fixé dans L^p, la suite $T_{i,j}(h)$ tend vers* 0 *pour $\sigma(L^p, L^q)$ quand j tend vars $+\infty$.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu c'est faux alors on peut supposer, en extrayant une sous-suite, qu'aucune sous-suite ne tend faiblement vers 0.

Si $p > 1$, on peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers $g \neq 0$.

Si $p = 1$ ou bien on peut en extraire une sous-suite qui est de Cauchy donc faiblement convergente dans L^1, sa limite sera $g \neq 0$, ou bien on peut en extraire une sous-suite équivalente à l_1. On a utilisé ici le théorème de Rosenthal [**6**].

Supposons d'abord que $\lim_{k \to +\infty} T_{i,j_k}(h) = g \neq 0$ pour $\sigma(L^p, L^q)$.

Soit $v = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k e_k$ un éléments de norme 1 de X. Posons $v^{(n)} = \sum_{k=1}^{n_0} |\lambda_k| e_{j_{k+n}}$ alors $\|v^{(n)}\| = \|v\| = 1$.

Soit $h \otimes v^{(n)}$ l'élément de $L^p(X)$ défini par $\sum_{k=1}^{n_0} |\lambda_k| h e_{j_{k+n}}$

$$\|h \otimes v^{(n)}\| = \|h\|_p \|v^{(n)}\|_X = 1.$$

Choisissons φ dans L^q telle que $\|\varphi\|_q = 1$ et $\langle \varphi, g \rangle = \|g\|_p \neq 0$. On a

$$\sum_{k=1}^{n_0} |\lambda_k| T_{i,j_{k+n}}(h) = Q_i \circ T(h \otimes v_n)$$

donc

$$\left| \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} |\lambda_k| T_{i,j_{k+n}}(h), \varphi \right\rangle \right| \leqslant \|h \otimes v_n\| \, \|\varphi\|_q = 1.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n_0} f|\lambda_k|\langle g,\varphi\rangle = \sum_{k=1}^{n_0} |\lambda_k|\,\|g\| \leqslant 1 = \left\|\sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k e_k\right\|.$$

On a donc démontré que $\|\Sigma_{k=1}^{n_0}\lambda_k e_k\| \geqslant \|g\|(\Sigma_{k=1}^{n_0}|\lambda_k|)$.

L'espace X serait alors isomorphe à l_1, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Supposons maintenant que la suite $(T_{i,j_k}(h))_{k\geqslant 1}$ est équivalente à l_1. Il existe $\delta > 0$ tel que $\|\Sigma_{k\geqslant 1}\lambda_k e_k\| = \|\Sigma_{k\geqslant 1}\lambda_k e_{j_k}\| \geqslant \frac{1}{\|h\|}\|\Sigma_{k\geqslant 1}\lambda_k T_{i,j_k}(h)\| \geqslant \frac{\delta}{\|h\|}\Sigma_{k\geqslant 1}|\lambda_k|$. On arrive à même contradiction et ceci achève la démonstration.

LEMME IV.2.2. *Pour tout j fixé et h fixé dans L^p, $\|T_{i,j}(h)\|_p$ tend vers* 0 *quand i tend vers* $+\infty$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Ces deux lemmes vont nous permettre de construire la suite (h_i) de fonctions sur B, isométrique à la suite de Haar et la suite (n_i) extraite de (n'_i) de façon à réaliser les conditions du théorème IV.1.4.

1°. Posons $n_1 = n'_1$, $B_1 = B$, $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2°. Supposons construits $n_1 < n_2 < \cdots < n_{l-1}$ et $h_1, h_2, \ldots, h_{l-1}$ de façon que si $B_2 = B$ et

$$B_{2i-1} = \text{support de } h_i^+ \text{ pour } i \geqslant 2,$$
$$B_{2i} = \text{support de } h_i^- \text{ pour } i \geqslant 2$$

on ait: $h_i \in X(B_i)$ pour $i \geqslant 2$.

On détermine alors $n_l \geqslant n_{l-1}$, dans la suite $(n'_i)_{i\geqslant 1}$ et tel que

$$\text{(a)} \qquad \|T_{n_i n_j} h_k\| < \delta_{lj}\frac{\|h_k\|}{2^{k+1}} \qquad \forall k < l, \forall j < l,$$

$$\text{(b)} \qquad \|E^{\mathcal{B}_{l-1}}(\mathbf{1}_B T_{n_i n_l} h_k)\| < \delta_{jl}\frac{\|h_k\|}{2^{k+2}} \qquad \forall k < l, \forall j < l.$$

$\mathcal{B}_{l-1}$ désigne ici la σ-algèbre engendrée par $(h_1, h_2, \ldots, h_{l-1})$. Ces deux conditions sont facilement réalisées un utilisant les deux lemmes précédents et le fait que $E^{\mathcal{B}_{l-1}} \circ \mathbf{1}_B$ est un opérateur de rang fini.

On détermine ensuite h_l dans $X(B_l)$ de façon à réaliser les conditions suivantes:

$$\text{(c)} \qquad |\langle T_{n_i n_j} h_l, h_k\rangle| < \delta_{ij}\frac{\|h_l\|}{2^{l+1}}\frac{\|h_k\|_q}{2^{k+1}} \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l,\ k < l,$$

$$|\langle T_{n_i n_j} h_k, h_l\rangle| < \delta_{ij}\frac{\|h_k\|}{2^{k+1}}\frac{\|h_l\|_q}{2^{l+1}} \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l,\ k < l,$$

$$\text{(d)} \qquad |\langle k_{n_i n_j}, h_l\rangle| < \delta_{ij}\frac{P(B_l)}{2^{l+2}} \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l, 2 \leqslant l,$$

$$\text{(e)} \qquad |\langle T_{n_i n_j} h_l, h_l\rangle - \theta_{n_i n_j}(B_l)| < \delta_{ij} P(B_l)^3 \qquad \forall i \leqslant l,\ j \leqslant l, 2 \leqslant l.$$

Les conditions (c) et (d) imposent que h_l soit dans un certain voisinage de 0 pour $\sigma(L^\infty, L^1)$. L'étude faite au §I, montre que la condition (e) peut être réalisée par un élément de $X(B_l)$ choisi dans un voisinage arbitraire de 0.

La construction étant terminée notons $\mathcal{B}$ la σ-algèbre engendrée par la suite $(h_l)_{l\geqslant 1}$ et $\tilde{X}$ l'espace engendré par la suite $(e_{n_i})_{i\geqslant 1}$. Il est clair que $L^p(B, \mathcal{B}, \tilde{X})$ est isométrique à $L^p(X)$.

Donnons nous un élément $f = \Sigma_{i\geqslant 1} f_{n_i} e_{n_i}$ de $L^p(B, \mathcal{B}, \tilde{X})$ et posons

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty} \Delta_{ij} \right) e_{n_i},$$

avec

$$\Delta_{ij} = E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} f_{n_j}\right).$$

Nous allons majorer la norme de Δ dans $L^p(X)$.

Evaluation de Δ_{ij} pour $i < j$. Supposons d'abord que $f_{n_j} = h_l$.

Si $l < j$, on a $\Delta_{ij} = E^{\mathcal{B}_{j-1}}(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} h_l) + (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}})(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} h_l)$,

$$\| E^{\mathcal{B}_{j-1}}\left(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} h_l\right)\| < \delta_{ij} \frac{\| h_l \|}{2^{l+1}} \quad \text{d'après (b)}$$

et

$$(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}})\left(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} h_l\right) = \sum_{k=j}^{\infty} \left\langle T_{n_i n_j} h_l, \frac{h_k}{\| h_k \|_q} \right\rangle \frac{h_k}{\| h_k \|_p}.$$

On utilise alors le (c) car $l < k$ et $i < j \leqslant k$, on en tire

$$\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}})\left(\mathbf{1}_B T_{n_i n_j} h_l\right)\| < \delta_{ij} \frac{\| h_l \|}{2^{l+1}} \sum_{k\geqslant j} \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \delta_{ij} \frac{\| h_l \|}{2^{l+2}}.$$

On a donc $\| \Delta_{ij} \| \leqslant \delta_{ij} \| h_l \| / 2^{l+1}$ si $j > l$.

Si $l \geqslant j$ un calcul identique à celui de la démonstration du théorème II.6, cas I, nous donne:

$$\| \Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) h_l \| < \delta_{ij} \| h_l \| \left(\frac{1}{2^l} + P(B_l)^2 \right) \quad \text{si } l \geqslant j.$$

Si on écrit maintenant $f_{n_j} = \Sigma_{l=1}^{\infty} b_l h_l / \| h_l \|$, alors

$$b_l = (E^{\mathcal{B}_l} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})\left(f_{n_j}\right) \quad \text{donc } | b_l | \leqslant 2 \| f_{n_j} \|.$$

Posons $f''_{n_j} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}})(f_{n_j}) = \Sigma_{l\geqslant j} b_l h_l / \| h_l \|$.

On déduit des majorations précédentes que

$$\| \Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) f''_{n_j} \| < \delta_{ij} 2 \| f_{n_j} \| \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} + P(B_l)^2 \right]$$

donc

$$\| \Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) f''_{n_j} \| < 8 \delta_{ij} \| f_{n_j} \| \quad \text{pour } i < j.$$

Comme $\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}) \|_\infty \leqslant \| \mathbf{1}_B k_{n_i n_j} \|_\infty < \delta / 2^{i+j}$ et $\| f''_{n_j} \| \leqslant 2 \| f_{n_j} \|$. On obtient

$$\| \Delta_{ij} \| < \left(8 \delta_{ij} + \frac{2\delta}{2^{i+j}} \right) \| f_{n_j} \| < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} \| f_{n_j} \|$$

pourvu que δ et δ_{ij} soient assez petits.

Evaluation de Δ_{ij} *pour* $i > j$. On suppose d'abord que $f_{n_j} = h_l$ et on fait un calcul analogue au précédent, en distinguant le cas $l < i$ (on utilise alors le (a)) et le cas $l \geqslant i$, pour lequel on majore la norme de $\Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})h_l$.

On arrive encore à

$$\|\Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(f_{n_j})\| < 8\delta_{ij}\|f_{n_j}\|.$$

On achève alors de la même façon et on obtient

$$\|\Delta_{ij}\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}\|f_{n_j}\|.$$

On a donc

$$\|\Delta\| \leqslant \sum_{i\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1}\frac{\varepsilon}{2^{i+j}}\|f\| = \varepsilon\|f\|.$$

Comme $\Delta = \pi_0 \circ Tf - \pi_0 \circ Df$, ceci achève la démonstration dans le cas où X n'est pas isomorphe à c_0.

Cas II. *X isomorphe à* c_0. (e_i) est alors K équivalente à la base canonique de c_0 [4].On a toujours $\lim_{j\to\infty} k_{ij} = 0$ en probabilité, en peut donc trouver B de mesure positive et une suite (n'_i) telle que

$$|k_{n'_i n'_j}(t)| < \frac{\delta}{2^{i+j}} \qquad \forall j > i, \forall t \in B.$$

Les lemmes IV.2.1 et IV.2.2 sont encore vrais.

Posons $X^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} k_{n'_i n'_j} e_j^*$, $X^{(i)}$ est un élément de $L^\infty(l_1)$ de norme inférieure à $(1+\delta)$ on peut donc trouver une suite $s(i)$ telle que la suite $X^{s(i)}$ converge pour $\sigma(L^\infty(l_1), L^1(c_0))$ vers $X^\infty = \sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{n'_j} e_j^*$.

On a donc $\|X^\infty\|_{L^\infty(l_1)} \leqslant 1 + \delta$. Si on pose $n''_j = n'_{s(j)}$, on aura $\sum_{j=1}^{\infty}|\Phi_{n''_j}| < +\infty$ et $\Phi_{n''_j}$ est la limite pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ de $(k_{n''_i n''_j})_{i\geqslant 1}$.

Nous pouvons maintenant construire la suite (n_i) extraite de (n''_i) et la suite (h_i).

1°. On pose $n_1 = n''_1$, $B_1 = B$ et $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2°. On suppose construit $n_1, \ldots, n_{l-1}$, $B_1, \ldots, B_{l-1}$, $h_1, \ldots, h_{l-1}$ tels que

$B_2 = B$ et $B_{2i-1} = S(h_i^+)$, $B_{2i} = S(h_i^-)$ si $i \geqslant 2$.

h_i soit dans $X(B_i)$.

B_l est donc déterminé. On choisit d'abord $n_l > n_{l-1}$ de façon à réaliser les conditions (a) et (b) du cas I et aussi

$$\text{(f)} \qquad \left\|E^{\mathcal{B}_{l-1}}(\mathbf{1}_B k_{n_l n_j} - \mathbf{1}_B \Phi_{n_j})\right\|_\infty < \delta_{l,j} \qquad \forall j < l.$$

Ceci est possible car $E^{\mathcal{B}_{l-1}}$. $\mathbf{1}_B$ est un opérateur de rang fini. Il transforme donc une suite convergente pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ en une suite convergente en norme.

On détermine ensuite h_l dans $X(B_l)$ de façon à réaliser les conditions (c), (d), (e) du cas I et aussi

$$\text{(g)} \qquad |\langle \Phi_{n_i}, h_l\rangle| < \delta_{l,i}\frac{P(B_l)}{2^{l+2}} \quad \text{pour } i \leqslant l, 2 \leqslant l.$$

Les calculs faits au cas I nous permettent d'écrire, en gardant la même définition pour Δ et Δ_{ij}

$$\|\Delta_{ij}\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}\|f_{n_j}\| \quad \text{si } i<j$$

et

$$\left\|\Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) f''_{n_j}\right\| < 8\delta_{ij}\|f_{n_j}\| \text{ pour } i>j \text{ où } f''_{n_j} = \left(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}}\right)\left(f_{n_j}\right).$$

On ne connait pas l'ordre de grandeur de $k_{n_i n_j}$ pour $i>j$. La construction va nous permettre de majorer $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})$ pour $i>j$.

LEMME IV.2.3. *Pour tout $i>j$, on a $\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j})\|_\infty \leqslant 7\delta_{ij}$.*

DÉMONSTRATION. On peut se limiter au cas où $p=1$ car pour $p>1$, c_0 possède la propriété $\mathcal{P}_p$. On fixe j et on écrit

$$E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B \Phi_{n_j}\right) = E^{\mathcal{B}_{i-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j} - \mathbf{1}_B \Phi_{n_j}\right) + \left(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}}\right)\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)$$
$$- \left(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}}\right)\left(\mathbf{1}_B \Phi_{n_j}\right).$$

On majore facilement les trois termes grâce à (f), (d) et (g) et on obtient:

$$\|E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j} - \mathbf{1}_B \Phi_{n_j}\right)\|_\infty < 2\delta_{ij} \quad \text{pour } i>j.$$

On en déduit que pour tout $r>i>j$ on a

$$\|E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j} - \mathbf{1}_B k_{n_r n_j}\right)\|_\infty < 2\delta_{ij} + 2\delta_{rj} < 4\delta_{ij}$$

(on suppose les nombres δ_{ij} décroissants en i et en j).

Supposons que pour un certain indice $i>j$ on ait

$$\|E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)\|_\infty > 7\delta_{ij}$$

alors

$$\|E^{\mathcal{B}_{i-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)\|_\infty > 7\delta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{2} > 6\delta_{ij}.$$

Il existe donc un atome B_l et $\mathcal{B}_{i-1}$ tel que

$$|E^{\mathcal{B}_{i-1}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)| > 6\delta_{ij} \quad \text{sur } B_l.$$

Par conséquent

$$|E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right)| > 6\delta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{2} > 5\delta_{ij} \quad \text{sur } B_l.$$

Les inégalitiés ci-dessus montrent que pour $r>i$ on aurait

$$|E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_r n_j}\right)| > 5\delta_{ij} - 4\delta_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{sur } B_l.$$

Posons $C = B_l$ et considérons la tribu $\mathcal{C}$ sur C engendrée par $h'_1 = \mathbf{1}_{B_l}$, $h'_2 = h_l$, $h'_3 = h_{2l-1}$, $h'_4 = h_{2l}, \ldots, h'_k = h_{\varphi(k)}$ où

$$\varphi(2^{n+1} - m) = (2^n l) - m, \qquad n \geqslant 1, 0 \leqslant m < 2^n.$$

$L^p(C, \mathcal{C})$ est isométrique à L^p. De plus pour tout $r \geqslant l$ ou bien r est de la forme $\varphi(k)$ donc $h_r = h'_k$, ou bien le support de h_r est disjoint de C. Cette remarque nous permet de dire que si $k \geqslant 2$ et φ est élément de $L^p(C, \mathcal{C})$ on a

$$(E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(\varphi) = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{\varphi(k)}})(\varphi).$$

D'autre part en appliquant les majorations du cas I à $f_{n_j} = \varphi$ on trouve que pour tout $r > j$ on a

$$\left\|\Delta_{r,j}(\varphi) - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_r n_j}\right)(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{r-1}})(\varphi)\right\| \leqslant 8\delta_{rj}\|\varphi\|.$$

Or

$$\left\|\sum_{r>j} \Delta_{r,j}(\varphi) e_{n_r}\right\|_{L^1(c_0)} \leqslant \left\|\sum_{r\geqslant 1} \Delta_{r,j}(\varphi) e_{n_r}\right\|_{L^1(c_0)} \leqslant \|T \circ U_j(\varphi)\|_{L^1(c_0)} \leqslant \|\varphi\|.$$

On en déduit si $\sum_{r\geqslant 1}\delta_{rj} < \frac{1}{8}$

$$(*) \qquad \left\|\sum_{r>j} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_r n_j}\right)(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{r-1}})(\varphi) e_{n_r}\right\|_{L^1(c_0)} \leqslant 2\|\varphi\|.$$

Choisissons un entier k_0 tel que $k_0 \geqslant 2$ et $\varphi(k_0) \geqslant i$. On sait, par exemple par [2], que l'espace

$$H_1 = \left\{\varphi \in L^1(C, \mathcal{C}) / \sup_k |E^{\mathcal{C}_k}\varphi| \in L^1\right\}$$

est strictement contenu dans L^1. On peut donc trouver φ dans $L^1(C, \mathcal{C})$, de norme 1, tel que

$$\left\|\sup_{k\geqslant k_0} |E^{\mathcal{C}_k}\varphi|\right\|_1 > \frac{3K}{\delta_{ij}} + 1.$$

On a donc

$$\left\|\sup_{k\geqslant k_0} |(E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(\varphi)|\right\| > \frac{3K}{\delta_{ij}}.$$

Comme la suite (e_i) est K équivalente à la base canonique de c_0

$$\left\|\sum_{k\geqslant k_0} (E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(\varphi) e_{n_{\varphi(k)+1}}\right\|_{L^1(c_0)} > \frac{3}{\delta_{ij}}.$$

On multiplie chaque terme par $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_{\varphi(k)+1}, n_j})$ qui est supérieur à δ_{ij} et on utilise l'égalité $(E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(\varphi) = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{\varphi(k)}})(\varphi)$. On obtient alors

$$\left\|\sum_{r>i} E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_r n_j}\right)(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{r-1}})(\varphi) e_{n_r}\right\|_{L^1(c_0)} > 3.$$

On obtient une contradiction avec $(*)$ et par conséquent on a démontré le lemme. C.Q.F.D.

Ce lemme nous permet de conclure, on avait

$$\|\Delta_{ij} - E^{\mathcal{B}}\left(\mathbf{1}_B k_{n_i n_j}\right) f''_{n_j}\| < 8\delta_{ij}\|f_{n_j}\|$$

où $f''_{n_j} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})f_{n_j}$. On en déduit

$$\|\Delta_{ij}\| \leqslant 8\delta_{ij}\|f_{n_j}\| + 7\delta_{ij}\big(2\|f_{n_j}\|\big),$$

$$\|\Delta_{ij}\| \leqslant 22\delta_{ij}\|f_{n_j}\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}\|f\|.$$

La majoration de $\|\Delta\|$ se fait comme au cas I.

IV.3 *Démonstration du Théorème* IV.1.5. Nous sommes donc ramener au cas d'un opérateur diagonal de $L^p(X)$. Nous allons, pour démontrer le théorème, utiliser de manière essentielle la négation de la propriété $\mathcal{P}_p$.

Enonçons d'abord un lemme.

LEMME IV.3.1. *Soit $T = (T_i)_{i\geqslant 1}$ un opérateur diagonal de $L^p(X)$. On peut trouver une suite (n_i) et un opérateur T_∞ de L^p tel que pour tout h dans L^p, la suite $T_{n_i}h$ converge vers $T_\infty h$ pour $\sigma(L^p, L^q)$.*

DEMONSTRATION. Il suffit donc de trouver une suite (n_i) telle que $(T_{n_i}h)_{i\geqslant 1}$ soit de Cauchy pour tout h élément d'une suite dense en norme dans L^p. Par un procédé diagonal, on voit qu'il suffit de le faire pour une seule fonction h.

Le résultat est donc trivial si $p > 1$.

Si $p = 1$, supposons qu'il existe une sous-suite de $T_n h$ qui ne posséde aucune sous-suite de Cauchy faible, on peut donc en extraire, d'aprés le théorème de Rosenthal, [**6**], une sous-suite $T_{l(n)}h$ qui est équivalente à l_1. D'après le "subsequence splitting lemma" de Rosenthal, [**7**], sur les suites de L^1, dont l'idée se trouve déjà dans Kadec et Pelczynski [**3**], on peut en extraire une nouvelle sous-suite, encore notée $T_{l(n)}h$ telle que l'on ait

$$T_{l(n)}h = U_n + d_n$$

avec $d_n = (T_{l(n)}h)\mathbf{1}_{E_n}$, E_n étant une suite disjointe et

$$\|d_n\|_1 = \int_{E_n} \|T_{l(n)}h\| \quad \text{converge vers une limite } \eta > 0.$$

On peut donc supposer que pour tout n, $\|d_n\|_1 > \eta/2$.

Pour toute famille $(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ de scalaires on a

$$\left\|\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right\| = \left\|\sum_{n=1}^N \lambda_n e_{l(n)}\right\| \geqslant \frac{1}{\|h\|\,\|T\|}\left\|\sum_{n=1}^N \lambda_n T_{l(n)} h e_{l(n)}\right\|$$

$$\geqslant \frac{1}{\|h\|\,\|T\|}\sum_{j=1}^N \int_{E_j}\left\|\sum_{n=1}^N \lambda_n T_{l(n)} h e_{l(n)}\right\|_X .$$

Pour chaque j on minore la fonction à intégrer par le coefficient de $e_{l(j)}$ donc

$$\left\|\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right\| \geqslant \frac{1}{\|h\|\,\|T\|}\sum_{j=1}^N |\lambda_j| \int_{E_j} |U_j + d_j| .$$

Mais $U_j + d_j = d_j$ sur E_j et on obtient

$$\left\|\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right\| > \frac{1}{\|h\|\,\|T\|}\sum_{j=1}^N |\lambda_j|\,\|d_j\|_1 > \frac{\eta}{2\|h\|\,\|T\|}\sum_{j=1}^N |\lambda_j| .$$

On obtient de nouveau une contradiction puisque X n'est pas isomorphe à l_1. C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème IV.1.5. On se donne $\varepsilon > 0$ et on choisit alors des nombres $\delta > 0$ et une suite décroissante $\delta_i > 0$ et ces nombres devront être bien choisis en fonction de ε.

Nous allons alors construire la matrice associée à T et aux nombres δ_i: Si on pose $T_i' = I - T_i = Q_i \circ (I - T) \circ U_i$ on peut construire une suite de mesures associées à la suite $(T_1, T_1', T_2, T_2', \text{etc.}\ldots)$ et à la suite de réels $(\delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2, \ldots)$. La construction faite au §I nous donne des mesures $\theta_i = k_i P$ et $\theta_i' = k_i' P$ telles que:

(1) $|k_i| \leqslant \|T_i\|$ et $|k_i'\| \leqslant \|T_i'\|$.

(2) $|k_i + k_i' - 1| < 2\delta_i < \delta$.

(3) Pour toute partie mesurable A, on construit une suite décroissante $X_n(A)$ de parties de $X(A)$ telles que

$$|\langle T_i h, h\rangle - \theta_i(A)| < \delta_i P(A)^3, \qquad \forall i \leqslant n, \forall h \in X_n(A),$$

$$|\langle T_i' h, h\rangle - \theta_i'(A)| < \delta_i P(A)^3, \qquad \forall i \leqslant n, \forall h \in X_n(A).$$

De plus 0 est adhérent à $X_n(A)$ (pour la topologie $\sigma(L^\infty L^1)$).

Posons alors

$$\Omega_i = \{t/k_i(t) \geqslant (1-\delta)/2\},$$
$$\Omega_i' = \{t/k_i'(t) \geqslant (1-\delta)/2\}.$$

On a $\Omega_i \cup \Omega_i' = [01]$ ps à cause de (2). En remplaçant au besoin T par $(I - T)$ on doit donc envisager deux cas:

I. Il existe une partie infinie I de $\mathbf{N}$ tel que $\bigcap_{i\in I}\Omega_i = B$ soit de mesure positive.

II. Pour toute partie infinie I de $\mathbf{N}$ on a $\bigcap_{i\in I}\Omega_i = \bigcap_{i\in I}\Omega_i' = \varnothing$ ps.

Cas I. Soit $B = \bigcap_{i\in I}\Omega_i$ un ensemble de mesure positive.

Si on désigne par X_I l'espace engendré par $\{e_j/j \in I\}$ et par T_I l'opérateur diagonal de $L^p(X_I)$ définit par la suite $(T_i)_{i\in I}$, on applique alors le lemme IV.3.1 à cet opérateur et on peut construire dans I une suite (n_i') et un opérateur T_∞ de L^p tel que $(T_{n_i'}h)$ converge faiblement vers $T_\infty h$ pour tout h dans L^p.

Fixons l entier et construisons une mesure $\hat{\theta}_{n_l'}$ associée à l'opérateur T_∞ par la méthode suivante:

On pose

$$\tilde{\theta}_{n_l'}(A) = \limsup_{\substack{h\in X_{n_l'}(A)\\ h\to 0}} \langle T_\infty h, h\rangle,$$

$\hat{\theta}_{n_l'}(A) = \inf\{\Sigma_{i=1}^n \tilde{\theta}_{n_l'}(A_i); (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ partition mesurable de $A\}$. On démontre exactement comme au §I, que ceci définit une mesure et on sait de plus que $\hat{\theta}_{n_l'}(A)$ est une valeur d'adhérence de $\{\langle T_\infty h, h\rangle;\ h \in X_{n_l'}(A),\ h \to 0\}$. Pout tout voisinage V de 0 pour $\sigma(L^\infty L^1)$ et pour tout $\varepsilon_l > 0$, on pourra trouver h dans $V \cap X(A)$ tel que

$$\left|\theta_{n_i'}(A) - \langle T_{n_i'} h, h\rangle\right| < \delta_i P(A)^3, \qquad \forall i \leqslant l,$$

$$\left|\hat{\theta}_{n_l'}(A) - \langle T_\infty h, h\rangle\right| < \varepsilon_l P(A)^3.$$

Enfin on sait, toujours d'après le §I, que $\hat{\theta}_{n'_i}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue:

$$\hat{\theta}_{n'_i} = \hat{k}_{n'_i} P, \quad \text{avec } |\hat{k}_{n'_i}| \leqslant \|T_\infty\| \leqslant \|T\|.$$

On peut supposer, en extrayant une sous-suite de (n'_i) que

$$\lim_{i \to +\infty} k_{n'_i} = k_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{i \to \infty} \hat{k}_{n'_i} = \hat{k}_\infty \quad \text{pour } \sigma(L^\infty, L^1).$$

Nous pouvons maintenant construire $(n_i)_{i \geqslant 1}$ et la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ sur B.

1°. Posons $n_1 = n'_1$ et $B_1 = B$, $h_1 = \mathbf{1}_B$.

2°. Supposons construits $n_1, \ldots, n_{l-1}$, $B_1, B_2, \ldots, B_{l-1}$ et $h_1, \ldots, h_{l-1}$ tels que

$$B_2 = B, \quad B_{2i-1} = S(h_i^+) \quad \text{si } i \geqslant 2,$$
$$B_{2i} = S(h_i^-),$$
$$h_i \text{ soit dans } X(B_i) \text{ pour } i \geqslant 2.$$

On note $\mathfrak{B}_j$ la σ-algèbre engendrée par $\{h_1, h_2, \ldots, h_j\}$.

On définit alors un entier $n_l > n_{l-1}$, extrait de la suite (n'_i) et tel que

$$\text{(a)} \qquad \left\| E^{\mathfrak{B}_{l-1}}\left[\mathbf{1}_B (T_{n_l} - T_\infty)(h_k)\right] \right\|_\infty < \delta_l \frac{\|h_k\|}{2^{k+2}}, \qquad \forall k < l,$$

$$\text{(b)} \qquad \left\| E^{\mathfrak{B}_{l-1}}\left[\mathbf{1}_B (k_{n_l} - k_\infty)\right] \right\|_\infty < \delta_{l/2},$$

$$\text{(c)} \qquad \left\| E^{\mathfrak{B}_{l-1}}\left[\mathbf{1}_B (\hat{k}_{n_l} - \hat{k}_\infty)\right] \right\|_\infty < \delta_{l/2} \|h_l\|.$$

Ceci est possible car $E^{\mathfrak{B}_{l-1}} \circ \mathbf{1}_B$ est un opérateur de rang fini que transforme les suites faiblement convergentes en suites convergentes pour la norme.

On choisira ensuite h_l dans $X(B_l)$ de façon à réaliser les conditions suivantes

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} |\langle T_{n_i} h_l, h_k \rangle| &< \delta_i \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}} \frac{\|h_k\|_q}{2^{k+1}}, \qquad \forall i \leqslant l, k < l, \\ |\langle T_{n_i} h_k, h_l \rangle| &< \delta_i \frac{\|h_k\|}{2^{k+1}} \frac{\|h_l\|_q}{2^{l+1}}, \qquad \forall i \leqslant l, k < l, \end{aligned}$$

$$\text{(e)} \qquad \begin{aligned} |\langle T_\infty h_l, h_k \rangle| &< \delta \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}} \frac{P(B_k)}{2^{k+1}}, \qquad k < l, \\ |\langle T_\infty h_k, h_l \rangle| &< \delta \frac{\|h_k\|}{2^{k+1}} \frac{P(B_l)}{2^{l+1}}, \qquad k < l, \end{aligned}$$

$$\text{(f)} \qquad \begin{aligned} |\langle k_{n_i}, h_l \rangle| &< \delta_i \frac{P(B_l)}{2^{l+2}}, \qquad \forall i \leqslant l, l \geqslant 2, \\ |\langle \hat{k}_{n_i}, h_l \rangle| &< \delta_i \|h_l\| \frac{P(B_l)}{2^{l+2}}, \qquad \forall i \leqslant l, l \geqslant 2, \\ |\langle k_\infty, h_l \rangle| &< \delta \frac{P(B_l)}{2^{l+2}}, \qquad l \geqslant 2, \\ |\langle \hat{k}_\infty, h_l \rangle| &< \delta \|h_l\| \frac{P(B_l)}{2^{l+2}}, \qquad l \geqslant 2, \end{aligned}$$

$$\text{(g)} \qquad \begin{aligned} &|\langle T_{n_i} h_l, h_l\rangle - \theta_{n_i}(B_l)| < \delta_i P(B_l)^3, \qquad \forall i \leqslant l,\ l \geqslant 2, \\ &|\langle T_\infty h_l, h_l\rangle - \hat{\theta}_{n_l}(B_l)| < \delta_l P(B_l)^3 \|h_l\|. \end{aligned}$$

Les conditions (d), (e), (f) imposent à h_l d'être dans un certain voisinage V de 0 et les remarques que précèdent cette construction montrent que (g) peut être réalisée par un élément h_l de $V \cap X(B_l)$. $\mathfrak{B}$ sera alors la σ-algèbre engendrée par la suite $(h_i)_{i\geqslant 1}$ et $\tilde{X}$ l'espace engendré par la suite $(e_{n_i})_{i\geqslant 2}$. Il est clair que $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ est isométrique à $L^p(X)$ donc (a) est vrai.

Avant de construire π_1 donnons nous un élément f de $L_0^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ soit

$$f = \sum_{j\geqslant 2} f_{n_j} e_{n_j}.$$

Posons $\Delta_i = E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_i} f_{n_i})$ et $\Delta = \Sigma_{i\geqslant 2} \Delta_i e_{n_i} = E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B Tf)$.

Nous allons montrer que Δ est trés proche du produit $E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) f$. Ceci va résulter de la proposition suivante:

PROPOSITION IV.3.2. *Si (δ_i) et δ sont assez petits on a*

$$\text{(1)} \qquad \left\| \Delta - \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}) e_{n_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{16} \|f\|,$$

$$\text{(2)} \qquad \left\| \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}) e_{n_i} - E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) f \right\| < \frac{\varepsilon}{16} \|f\|$$

et $E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) \geqslant \frac{1}{4}$.

Montrons comment cette proposition permet de construire π_1 de façon à réaliser les conditions (b) et (c) du théorème IV.1.4.

On définit des opérateurs π_2 et π_3 de $L^p(X)$ par

$$\pi_2\left(\sum_{j\geqslant 1} f_j e_j\right) = \frac{\mathbf{1}_B}{E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty)} \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B f_{n_i} e_{n_i}).$$

On a $\|\pi_2\| \leqslant 4$ car $E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) \geqslant \frac{1}{4}$

$$\pi_3\left(\sum_{j\geqslant 1} f_j e_j\right) = \sum_{i\geqslant 2} (E^{\mathfrak{B}} - E^{\mathfrak{B}_1})(f_{n_i}) e_{n_i}.$$

On voit facilement que π_3 est une projection de $L^p(X)$ sur $L_0^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ et $\|\pi_3\| \leqslant 2$. Posons $\pi_1 = \pi_3 \circ \pi_2$, on a $\|\pi_1\| \leqslant 8$ et si f est dans $L_0^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ on a

$$\pi_1 \circ Tf - f = \pi_3(\pi_2 \circ Tf - f),$$
$$\|\pi_1 \circ Tf - f\| \leqslant 2\|\pi_2 \circ Tf - f\|.$$

Il est facile de voir que $\|\pi_2 \circ Tf - f\| \leqslant 4\|\Delta - E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) f\|$. La proposition IV.3.2 montre que

$$\|\pi_2 \circ Tf - f\| \leqslant 4\frac{\varepsilon}{8}\|f\| = \frac{\varepsilon}{2}\|f\|,$$
$$\|\pi_1 \circ Tf - f\| < \varepsilon\|f\|.$$

Ceci achève donc la démonstration du théorème IV.1.5 dans le cas I.

Démonstration de la proposition IV.3.2. Il suffit de prendre $\delta < \frac{1}{2}$ pour avoir $k_\infty \mathbf{1}_B > \frac{1}{4}$ donc $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) > \frac{1}{4}$. Pour démontrer (1) et (2) nous allons évaluer Δ_i. Supposons d'abord que $f_{n_i} = h_l$, avec $l \geqslant 2$ (car $\int f_{n_i} = 0$).

Si $l \geqslant i$ on écrit alors

$$\Delta_i - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i}) h_l = \psi_l' + \psi_l'' + c_l h_l$$

avec

$$\psi_l' = \sum_{k \neq l} \left\langle T_{n_i} h_l, \frac{h_k}{\|h_k\|_q} \right\rangle \frac{h_k}{\|h_k\|_p},$$

$$\psi_l'' = -(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})(\mathbf{1}_B k_{n_i}) h_l,$$

$$c_l = \frac{\langle T_{n_i} h_l, h_l \rangle - \theta_{n_i}(B_l)}{P(B_l)}.$$

On majore successivement chacun des trois termes en utilisant (d), (f) et (g). On obtient donc

$$\|\Delta_i - E^{\mathcal{B}}(k_{n_i} \mathbf{1}_B) h_l\| < \delta_i \|h_l\| \left(\frac{1}{2^l} + P(B_l)^2 \right).$$

Si $l < i$ on écrit

$$\begin{aligned} \Delta_i - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty h_l) &= E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B (T_{n_i} - T_\infty) h_l\right] \\ &= E^{\mathcal{B}_{i-1}}\left[\mathbf{1}_B (T_{n_i} - T_\infty) h_l\right] + (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-l}})(\mathbf{1}_B T_{n_i} h_l) - (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(\mathbf{1}_B T_\infty). \end{aligned}$$

On majore successivement chacun des trois termes en utilisant (a), (d) et (e). On obtient donc

$$\|\Delta_i - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty h_l)\| < \left(\delta_i + \frac{\delta}{2^i} \right) \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}} \quad \text{pour } l < i.$$

Ecrivons maintenant $f_{n_i} = \sum_{l=2}^{\infty} b_l h_l / \|h_l\|$, $b_l = (E^{\mathcal{B}_l} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})(f_{n_i})$ donc $|b_l| \leqslant 2\|f_{n_i}\|$ et posons $f_{n_i}' = E^{\mathcal{B}_{i-1}}(f_{n_i})$, $f_{n_i}'' = f_{n_i} - f_{n_i}'$, $i \geqslant 2$.

Les majorations précédentes montrent que

$$\begin{aligned} &\left\| \Delta_i - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}') - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i}) f_{n_i}'' \right\| \\ &\qquad \leqslant 2\|f_{n_i}\| \left(\delta_i + \frac{\delta}{2^i} \right) \sum_{l=2}^{i-1} \frac{1}{2^{l+1}} + 2\|f_{n_i}\| \delta_i \sum_{\substack{l=i \\ l \geqslant 2}}^{\infty} \left(\frac{1}{2^l} + P(B_l)^2 \right). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{l \geqslant 2} P(B_l)^2 \leqslant 2$, on trouve

$$\left\| \Delta_i - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}') - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i}) f_{n_i}'' \right\| < \left(5\delta_i + \frac{\delta}{2^{i+1}} \right) \|f_{n_i}\|. \tag{3}$$

Nous allons maintenant montrer plusieurs lemmes qui seront utiles pour la démonstration de la proposition IV.3.2. Il s'agit en fait de "remplacer" dans l'inégalité (3), k_{n_i} par $\widehat{k_{n_i}}$, puis ensuite $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}}) f_{n_i}''$ par $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}'')$.

LEMME IV.3.3. *Pour tout $i \geqslant 2$ on a*

$$\left\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(\mathbf{1}_B k_{n_i})\right\|_\infty < \frac{\delta_i}{2^{i+1}},$$

$$\left\|(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-l}})(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}})\right\|_\infty < \frac{\delta_i \|h_i\|}{2^{i-1}},$$

$$\left\|E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B(\widehat{k_{n_i}} - k_\infty)\right]\right\|_\infty < \left(\delta_i + \frac{\delta}{2^{i+1}}\right),$$

$$\left\|E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B(\widehat{k_{n_i}} - k_\infty)\right]\right\|_\infty < \|h_i\|\left(\delta_i + \frac{\delta}{2^{i+1}}\right).$$

La démonstration est laissée au lecteur, elle utilise les inégalités (b), (c) et (f).

LEMME IV.3.4. *Si on pose $f''_{n_i} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(f_{n_i})$, on a pour tout $i \geqslant 2$*

$$\left\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i}) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}}) f''_{n_i}\right\| < \left(2\delta_{i-1} + \frac{\delta}{2^{i-3}}\right)\|f_{n_i}\|.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $l \geqslant 2$ on a

$$E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty h_l) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_l}}) h_l = \psi'_l + \psi''_l = c_l h_l$$

avec

$$\psi'_l = \sum_{k \neq l} \left\langle T_\infty h_l, \frac{h_k}{\|h_k\|_q} \right\rangle \frac{h_k}{\|h_k\|}.$$

Comme $k \neq l$ on peut utiliser (e) et on trouve

$$\|\psi'_l\|_\infty \leqslant \delta \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}}, \quad \psi''_l = -(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{l-1}})(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_l}}) h_l.$$

On utilise alors le lemme IV.3.3, car $l \geqslant 2$, et on obtient

$$\|\psi''\|_\infty < \delta_l \frac{\|h_l\|}{2^{l+1}}.$$

Enfin

$$c_l = \frac{\langle T_\infty h_l, h_l \rangle - \widehat{\theta_{n_l}}(B_l)}{P(B_l)}.$$

La condition (g) donne $|c_l| < \delta_l P(B_l)^2 \|h_l\|$. On obtient donc

$$\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty h_l) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_l}}) h_l\|_\infty < \|h_l\|\left(\frac{\delta + \delta_l}{2^{l+1}} + \delta_l P(B_l)^2\right).$$

Ecrivons maintenant $f_{n_i} = \sum_{l=2}^\infty b_l h_l / \|h_l\|$ et $|b_l| \leqslant 2\|f_{n_i}\|$.

On déduit de la majoration précédente

$$\left\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i}) - \sum_{l \geqslant i} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_l}}) \frac{b_l}{\|h_l\|} h_l\right\|_\infty \leqslant 2\|f_{n_i}\| \sum_{l \geqslant i}\left(\frac{\delta + \delta_l}{2^{l+1}} + \delta_l P(B_l)^2\right).$$

Comme $\Sigma_{l\geqslant 2} P(B_l)^2 \leqslant 2$, si on choisit $\delta_l \leqslant \delta$ et décroissante on obtient

$$(4)\qquad \left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i}) - \sum_{l\geqslant i} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_l}}) \frac{b_l}{\|h_l\|} h_l \right\|_\infty \leqslant \|f_{n_i}\| \left(4\delta_i + \frac{\delta}{2^{i-1}}\right).$$

En utilisant le lemme IV.3.3 et en imposant $2\Sigma_{l\geqslant i}\delta_l < \delta_{i-1}$,

$$(5)\qquad \left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) f''_{n_i} - \sum_{l\geqslant i} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_l}}) \frac{b_l h_l}{\|h_l\|} h_l \right\|_\infty \leqslant \|f_{n_i}\| \left(\delta_{i-1} + \frac{\delta}{2^{i-1}}\right)$$

et

$$(6)\qquad \left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) f''_{n_i} - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}}) f''_{n_i} \right\| \leqslant 2\|f_{n_i}\| \left(\delta_i + \frac{\delta}{2^{i+1}}\right).$$

Les formules (4), (5) et (6) donnent donc

$$\left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) f''_{n_i} - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i}) \right\| \leqslant \|f_{n_i}\| \left(\delta_{i-1} + 6\delta_i + \frac{5\delta}{2^i}\right).$$

Si (δ_i) est suffisamment décroissante on a donc
(7)

$$\left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) f''_{n_i} - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i}) \right\| \leqslant \|f_{n_i}\| \left(2\delta_{i-1} + \frac{\delta}{2^{i-3}}\right) \qquad \forall i \geqslant 2. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE IV.3.5. *Pour tout φ dans $L^p_0(B, \mathcal{B})$ on a*

$$\left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty \varphi) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty)\varphi \right\|_\infty < 2\delta \|\varphi\|.$$

DÉMONSTRATION. Dans la démonstration précédente, on obtient, en faisant $i = 2$ et $f''_{n_i} = f_{n_i} = \varphi$, d'après les formules (4) et (5)

$$\left\| E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty})\varphi - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty \varphi) \right\|_\infty \leqslant \|\varphi\| (\delta_1 + 4\delta_2 + \delta).$$

Si $\delta_1 + 4\delta_2 \leqslant \delta$, on aura donc la majoration cherchée. C.Q.F.D.

LEMME IV.3.6. *L'opérateur S de $L^p(B, \mathcal{B}, \tilde{X})$ défini par*

$$S\left(\sum_{i\geqslant 2} f_{n_i} e_{n_i}\right) = \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}) e_{n_i}$$

est un opérateur continu et $\|S\| \leqslant \|T\|$.

DÉMONSTRATION. On sait que $\|T_i\| \leqslant \|T\|$ donc $\|T_\infty\| \leqslant \|T\|$.

Il suffit de montrer que pour toute suite finie $f_{n_2}, f_{n_3}, \ldots, f_{n_j}$ d'éléments de $L^p(B, \mathcal{B})$ on a

$$\left\| \sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}) e_{n_i} \right\| \leqslant \|T\| \left\| \sum_{i=2}^{j} f_{n_i} e_{n_i} \right\|.$$

On peut en outre supposer que les f_{n_i} sont dans l'espace engendré par $(h_k)_{k\leqslant N}$. Le calcul que nous avons fait pour majorer la norme de

$$E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f'_{n_i} - \mathbf{1}_B T_{n_i} f'_{n_i})$$

montre que si $i \geqslant N$ et si φ vérifie $E^{\mathcal{B}_N}\varphi = \varphi$, alors

$$\left\|E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty \varphi - \mathbf{1}_B T_{n_i}\varphi)\right\| < \left(\delta_i + \frac{\delta}{2^i}\right)\|\varphi\|.$$

On en déduit, pour tout $k \geqslant N$ l'inégalité

$$\left\|\sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i})e_{n_i} - \sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_{i+k}} f_{n_i})e_{n_i}\right\| < \sum_{i=2}^{j}\left(\delta_{i+k} + \frac{\delta}{2^{i+k}}\right)\|f_{n_i}\|.$$

Si on choisit la suite δ_i de façon que $\Sigma_{j\geqslant i}\delta_j < \delta_i$, alors

$$\left\|\sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i})e_{n_i} - \sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_{i+k}} f_{n_i})e_{n_i}\right\| < \left(\delta_k + \frac{\delta}{2^k}\right)\left\|\sum_{i=2}^{j} f_{n_i}e_{n_i}\right\|.$$

Ceci montre que $S(\Sigma_{i=2}^{j} f_{n_i}e_{n_i})$ est limite en norme, quand $k \to +\infty$, de la suite $\Sigma_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_{i+k}} f_{n_i})e_{n_i}$. Or

$$\left\|\sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_{i+k}} f_{n_i})e_{n_i}\right\| = \left\|\sum_{i=2}^{j} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_{n_{i+k}} f_{n_i})e_{n_{i+k}}\right\|$$

$$\leqslant \|T\|\left\|\sum_{i=2}^{j} f_{n_i}e_{n_{i+k}}\right\| = \|T\|\left\|\sum_{i=2}^{j} f_{n_i}e_{n_i}\right\|.$$

La limite vérifie encore cette inégalité et on a donc

$$\left\|S\left(\sum_{i=2}^{j} f_{n_i}e_{n_i}\right)\right\| \leqslant \|T\|\left\|\sum_{i=2}^{j} f_{n_i}e_{n_i}\right\|. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE IV.3.7. *Soit $f = \Sigma_{i\geqslant 2} f_{n_i}e_{n_i}$ un élément de $L_0^p(B, \mathcal{B}, \tilde{X})$ et $f''_{n_i} = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{i-1}})(f_{n_i})$. On a alors*

$$\left\|\sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i} - \mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}})f''_{n_i}\right\| \leqslant 2(1 + \|T\|)\|f\|.$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité (3) nous donne si $\Sigma_{i\geqslant 2}(5\delta_i + \delta/2^{i+1}) \leqslant 1$

$$\left\|\Delta - \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f'_{n_i})e_{n_i} - \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i})f''_{n_i}e_{n_i}\right\| \leqslant \|f\|.$$

D'autre part $\Delta = E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B Tf)$, donc $\|\Delta\| \leqslant \|T\|\,\|f\|$.

D'après le lemme IV.3.6 on a $\|\Sigma_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i})e_{n_i}\| \leqslant \|T\|\,\|f\|$.

En additionnant ces trois inégalités on obtient

$$\left\|\sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i})e_{n_i} - \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i})f''_{n_i}e_{n_i}\right\| \leqslant (1 + 2\|T\|)\|f\|.$$

En utilisant le lemme IV.3.4 et en supposant $\Sigma_{i\geqslant 2} 2\delta_{i-1} + \delta/2^{i-3} \leqslant 1$, on obtient

$$\left\|\sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f''_{n_i})e_{n_i} - \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}})f''_{n_i}e_{n_i}\right\| \leqslant \|f\|.$$

On en conclut par addition

$$\left\|\sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_{n_i} - \mathbf{1}_B \widehat{k_{n_i}})f''_{n_i}e_{n_i}\right\| \leqslant (2 + 2\|T\|)\|f\|. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous allons utiliser ce corollaire et l'hypothèses que X ne possède pas la propriété $\mathcal{P}_p$ pour montrer que $E^{\mathcal{B}}[\mathbf{1}_B(k_{n_i} - \widehat{k_{n_i}})]$ est très petit. C'est le résultat du lemme suivant

LEMME IV.3.8. *Pout tout $i \geqslant 2$ on a* $\|E^{\mathcal{B}}[\mathbf{1}_B(k_{n_i} - k_{n_i})]\|_\infty \leqslant 10\delta_i + \delta/2^{i-1}$.

DÉMONSTRATION. Pour tout i on choisit un entier N_i tel que

$$2\delta_i \geqslant (N_i - 8)\delta_i - \frac{\delta}{2^{i-1}} \geqslant \delta_i.$$

Donc

$$N_i\delta_i \leqslant 10\delta_i + \frac{\delta}{2^{i-1}}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que pour un certain i fixé on ait

$$\left\|E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B\left(k_{n_i} - \widehat{k_{n_i}}\right)\right]\right\|_\infty > N_i\delta_i.$$

En utilisant plusieurs fois le lemme IV.3.3 on trouve un atome B_l de $\mathcal{B}_{i-1}$ tel que pour tout $j \geqslant i$ on ait:

$$\left|E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B\left(k_{n_j} - \widehat{k_{n_j}}\right)\right]\right| \geqslant (N_i - 8)\delta_i - \frac{\delta}{2^{i-1}} > \delta_i \quad \text{sur } B_l.$$

Considérons la σ-algèbre $\mathcal{C}$ sur $B_l = C$ engendrée par

$$h'_1 = \mathbf{1}_{B_l}, \quad h'_2 = h_l, \quad h'_3 = h_{2l-1}, \quad h'_4 = h_{2l}, \ldots, h'_k = h_{\varphi(k)}$$

où $\varphi(2^{n+1} - m) = 2^n l - m \,\forall n \geqslant 1$ et $0 \leqslant m < 2^n$. Si alors j est de la forme $\varphi(k)$, $k \geqslant 2$, ou le support de h_j ne rencontre pas C, donc si φ est dans $L^p(C, \mathcal{C})$ et $k \geqslant 2$ on a $(E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(\varphi) = (E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{\varphi(k)}})(\varphi)$.

Soit k_0 le premier entier tel que $k_0 \geqslant 2$ et $\varphi(k_0) \geqslant i$. Comme X ne vérifie pas $\mathcal{P}_p$ et que $L^p(C, \mathcal{C})$ est isométrique à L^p, on peut trouver une suite $(g_k)_{k \geqslant k_0}$ dans $L^p(C, \mathcal{C})$ telle que

$$\left\|\sum_k g_k e_k\right\| = 1$$

et

$$\left\|\sum_{k \geqslant k_0} (E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(g_k) e_k\right\| \geqslant \frac{3 + 2\|T\|}{\delta_i}.$$

Posons alors $f_{n_j} = g_k$ si $j = \varphi(k) + 1$, $k \geqslant k_0$,

$$f_{n_j} = 0 \quad \text{si } j \text{ n'est pas de cette forme.}$$

On a $(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}})(f_{n_j}) = 0$ si $j \neq \varphi(k) + 1$, $k \geqslant k_0$,

$$(E^{\mathcal{B}} - E^{\mathcal{B}_{j-1}})(f_{n_j}) = (E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(g_k) \quad \text{si } j = \varphi(k) + 1, k \geqslant k_0.$$

Comme d'autre part si $k \geqslant k_0$ et $j = \varphi(k) + 1$ on a

$$\left|E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B\left(k_{n_j} - \widehat{k_{n_j}}\right)\right]\right| > \delta_i \quad \text{sur } C,$$

on en déduit

$$\left\| \sum_{j\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B\left(k_{n_j} - \widehat{k_{n_j}}\right)\right] f''_{n_j} e_{n_j} \right\| \geqslant \delta_i \left\| \sum_{k\geqslant k_0} (E^{\mathcal{C}} - E^{\mathcal{C}_k})(g_k) e_k \right\| \geqslant 3 + 2\|T\|.$$

Mais d'après le corollaire IV.3.7 on doit avoir

$$\left\| \sum_{j\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}\left[\mathbf{1}_B\left(k_{n_j} - \widehat{k_{n_j}}\right)\right] f''_{n_j} e_{n_j} \right\| \leqslant (2 + 2\|T\|).$$

On obtient donc une contradiction et ceci achève la démonstration du lemme IV.3.8.

Nous pouvons maintenant démontrer les inégalités (1) et (2) de la proposition IV.3. En utilisant l'inégalité (3), le lemme IV.3.4 et le lemme IV.3.8 on obtient facilement

$$\left\|\Delta_i - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i})\right\| \leqslant \|f_{n_i}\| \left(5\delta_i + \frac{\delta}{2^{i+1}} + 2\delta_{i-1} + \frac{\delta}{2^{i-3}} + 20\delta_i + \frac{\delta}{2^{i-2}}\right).$$

Si δ et δ_i sont suffisamment petits, on obtient donc la formule (1)

$$\left\| \sum_{i\geqslant 2} \Delta_i e_{n_i} - \sum_{i\geqslant 2} E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B T_\infty f_{n_i}) e_{n_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{16} \|f\|.$$

Pour démontrer la formule (2) nous utiliserons le corollaire IV.3.5. Remarquons d'abord que $E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B k_\infty) = E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty})$ à cause dès lemmes IV.3.3 et IV.3.8. La formule (2) devient donc, avec les notations précédentes:

$$\left\|Sf - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) f\right\| < \frac{\varepsilon}{16} \|f\|.$$

Nous allons montrer en fait que

$$\left\|Sf - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) f\right\|_{L^\infty(X)} < \frac{\varepsilon}{16} \|f\|.$$

On choisit pour cela une suite dense (g_k) pour $\sigma(X^*, X)$ dans la boule unité de X^*. On pose alors

$$y_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} g_k(e_i) e_i^*.$$

Il est facile de voir que $\|y_{k,n}\| \leqslant 1$ et que pour tout x dans X

$$\|x\| = \sup_{k,n} \langle y_{k,n}, x\rangle.$$

Posons maintenant $\varphi_{k,n} = \langle y_{k,n}, \Sigma_{i\geqslant 2} f_{n_i} e_{n_i}\rangle$. $\varphi_{k,n}$ est un élément de $L^p_\delta(B, \mathcal{B})$ et on a

$$\|\varphi_{k,n}\|_p \leqslant \left\| \sum_{i\geqslant 2} f_{n_i} e_{n_i} \right\| = \|f\|.$$

On applique le corollaire IV.3.5 à $\varphi_{k,n}$ et on obtient

$$\left\|E^{\mathcal{B}}[\mathbf{1}_B T_\infty \varphi_{k,n}] - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B \widehat{k_\infty}) \varphi_{k,n}\right\|_\infty \leqslant 2\delta \|\varphi_{k,n}\|_p \leqslant 2\delta \|f\|.$$

Pour tout t fixé on a

$$\|Sf(t) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B\widehat{k_\infty})(t)f(t)\|_X = \sup_{k,n} \left|\langle y_{k,n}; Sf(t) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B\widehat{k_\infty})(t)f(t)\rangle\right|$$
$$= \sup_{k,n} \left|E^{\mathcal{B}}[\mathbf{1}_B T_\infty(\varphi_{k,n})](t) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B\widehat{k_\infty})(t)\varphi_{k,n}(t)\right|.$$

L'enveloppe supérieure d'une famille dénombrable de fonctions bornées presque partout par $2\delta\|f\|$ est aussi bornée presque partout par $2\delta\|f\|$ donc

$$\|Sf(t) - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B\widehat{k_\infty})(t)f(t)\|_X \leqslant 2\delta\|f\| \quad \text{ps.}$$

On en déduit

$$\|Sf - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B\widehat{k_\infty})f\|_{L^\infty(X)} \leqslant 2\delta\|f\|.$$

A fortiori, si $2\delta < \varepsilon/16$

$$\|Sf - E^{\mathcal{B}}(\mathbf{1}_B\widehat{k_\infty})f\|_{L^p(X)} < \frac{\varepsilon}{16}\|f\|.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition IV.3.2 et par conséquent celle du théorème IV.1.5 dans le cas I.

Cas II. On suppose maintenant que pour toute partie infinie I de $\mathbf{N}$ on a $\bigcap_{i\in I}\Omega_i = \bigcap_{i\in I}\Omega_i' = \varnothing$ ps.

Comme $\Omega_i'^c \subset \Omega_i$, on peut facilement déterminer une suite d'entiers $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \cdots$, telle que $B = \bigcap_n \bigcup_{i=p_n}^{q_n}\Omega_i$ soit de mesure positive. On peut même supposer, qu besoin en diminuant les Ω_i, que pour tout n, $\{\Omega_i, p_n \leqslant i \leqslant q_n\}$ est une partition de B.

Nous allons définir un nouvel opérateur diagonal auquel nous pourrons appliquer les résultats précédents: Posons

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=p_n}^{q_n} \mathbf{1}_{\Omega_i} T_i(\varphi\mathbf{1}_{\Omega_i}).$$

LEMME IV.3.9. *L'opérateur Q de $L^p(X)$ défini par*

$$Q\Big(\sum_n \lambda_n e_n\Big) = \sum_n Q_n(\lambda_n)e_n$$

est continu et $\|Q\| \leqslant \|T\|$.

DÉMONSTRATION. Pour tout t fixé, il existe un seul indice $p_k \leqslant i_k \leqslant q_k$ tel que t soit dans Ω_{i_k}. On a donc

$$\left\|Q\Big(\sum_n \lambda_n e_n\Big)(t)\right\|_X = \left\|\sum_k T_{i_k}(\lambda_k\mathbf{1}_{\Omega_{i_k}})(t)e_k\right\|_X$$
$$= \left\|\sum_k T_{i_k}(\lambda_k\mathbf{1}_{\Omega_{i_k}})(t)e_{i_k}\right\|_X$$
$$\leqslant \left\|\sum_k \sum_{i=p_k}^{q_k} T_i(\lambda_k\mathbf{1}_{\Omega_i})(t)e_i\right\|_X.$$

En prenant les normes dans L^p on obtient

$$\left\|Q\left(\sum \lambda_n e_n\right)\right\| \leqslant \|Tf\| \quad \text{où } f = \sum_{i=p_k}^{q_k} \lambda_k \mathbf{1}_{\Omega_i} e_i.$$

On montre facilement que $\|f(t)\|_X = \|\Sigma_k \lambda_k(t) e_k\|_X$ pour tout t donc $\|f\| = \|\Sigma_k \lambda_k e_k\|$. On en déduit

$$\left\|Q\left(\sum \lambda_n e_n\right)\right\| \leqslant \|T\| \left\|\sum_n \lambda_n e_n\right\|. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le lemme IV.3.1 montre qu'on peut trouver un opérateur Q_∞ de L^p et une suite $r'(n)$ d'entiers telles que, pour tout h dans L^p:

$$\lim_{n\to\infty} Q_{r'(n)} h = Q_\infty h \quad \text{pour } \sigma(L^p, L^q).$$

Considérons les mesures

$$\mu_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} \theta_i \mathbf{1}_{\Omega_i},$$

$$\mu_n = \varphi_n P \quad \text{avec } \varphi_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} k_i \mathbf{1}_{\Omega_i}.$$

On a donc par construction $\varphi_n \geqslant (1-\delta)/2$ sur B.

Définissons, pour tout A mesurable, une suite $Y_n(A)$ décroissante de parties de A:

$$Y_0(A) = X(A),$$

$$Y_n(A) = \left\{h \in Y_{n-1}(A);\ h = \sum_{j=p_n}^{q_n} h_j \text{ où } h_j \in X_j(A \cap \Omega_j)\right\}.$$

Si h est dans $Y_n(A)$ nous avons

$$\langle Q_n h, h\rangle = \sum_{j=p_n}^{q_n} \langle T_j h_j, h_j\rangle.$$

Or $|\langle T_j h_j, h_j\rangle - \theta_j(A \cap \Omega_j)| < \delta_j P(A \cap \Omega_j)^3$ car $h_j \in X_j(A \cap \Omega_j)$ donc $|\langle Q_n h, h\rangle - \mu_n(A)| \leqslant \Sigma_{j=p_n}^{q_n} \delta_j P(A \cap \Omega_j)^3$. On a $\delta_j \leqslant \delta_{p_n} \leqslant \delta_n$ donc

$$|\langle Q_n h, h\rangle - \mu_n(A)| < \delta_n P(A)^3.$$

Comme $Y_n(A) \subset Y_k(A)$ si $k \leqslant n$ on aura aussi

$$|\langle Q_k h, h\rangle - \mu_k(A)| < \delta_k P(A)^3 \qquad \forall k \leqslant n.$$

La construction des mesures associées aux opérateurs faite au §I, montre que pour construire une mesure $\hat{\mu}_n$ associée à Q_∞ en posant

$$\hat{\mu}_n(A) = \limsup_{\substack{h \in Y_n(A) \\ h \to 0}} \langle Q_\infty h, h\rangle$$

et

$$\hat{\mu}_n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_n(A_i);\ (A_1, \ldots, A_N) \text{ partition de } A\right\}$$

il suffit de montrer les deux propriétés suivantes:

(a) 0 est adhérent à $Y_n(A)$.

(b) Si A_1 et A_2 sont disjoints et h_1 fixé dans $Y_n(A_1)$ alors il existe un voisinage de 0 pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ tel que si h_2 est dans $Y_n(A_2) \cap W$ alors $h_1 + h_2$ est dans $Y_n(A)$. Pour montrer (a) on se donne un voisinage V de 0 et on pose

$$\Phi = \{\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_n)/p_k \leqslant i_k \leqslant q_k\}.$$

On pose alors, pour α dans Φ, $\Omega^{(\alpha)} = \bigcap_{k=1}^n \Omega_{i_k}$ si $\alpha(i_1, \ldots, i_k)$.On met une relation d'ordre sur Φ et on construit par récurrence, en utilisant les propriétés (a) et (b) pour $X_j(E)$, pour tout E mesurable et pour tout j, des fonctions $h^{(\alpha)}$ telles que:

$h^\alpha \in X_{q_n}(A \cap \Omega^{(\alpha)})$ et $\Sigma_{\alpha\in\Phi} h^\alpha \in V$.

Si $\Phi_j = \{\alpha \in \Phi/\Omega^\alpha \subset \Omega_j\}$ alors on imposera que $\Sigma_{\alpha\in\Phi_j} h^\alpha = h_j$ soit dans $X_{q_n}(A \cap \Omega_j)$, ceci pour tout $p_k \leqslant j \leqslant q_k$ et $k \leqslant n$.

La fonction $h = \Sigma_{\alpha\in\Phi} h^\alpha$ est donc dans $V \cap Y_n(A)$.

La propriété (b) se démontre de façon analogue.

En considérant l'opérateur Q_∞, limite des $Q_{r'(n)}$, on va construire les mesures $\hat{\mu}_{r'(n)} = \hat{\varphi}_{r'(n)} P$ associées à Q_∞ et définies, comme il a été rappelé, à partir de $Y_{r'(n)}(A)$.

Comme $\varphi_{r'(n)} \geqslant (1-\delta)/2$ sur B, on est dans la situation du Cas I et on va donc pouvoir construire une sous-suite $(r(n))$ de $(r'(n))$ et une σ-algèbre $\mathfrak{B}$ sur B telle que si $\tilde{X}$ est l'espace engendré par $(e_{r(n)})_{n\geqslant 2}$ alors $L^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ soit isométrique à $L^p(X)$. On peut également trouver une fonction $\varphi_\infty \geqslant \frac{1}{4}$ telle que si $\lambda = \Sigma_{n\geqslant 2} \lambda_{r(n)} e_{r(n)}$ est dans $L_0^p(B, \mathfrak{B}, X)$ alors

$$\left\|E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B Q(\lambda)) - E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B \varphi_\infty)\lambda\right\| < \frac{\varepsilon}{8}\|\lambda\|. \tag{8}$$

Nous pouvons maintenant définir F et π_1

$$F = \left\{\sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} \lambda_{r(n)} \mathbf{1}_{\Omega_i} e_i;\ \sum_{n\geqslant 2} \lambda_{r(n)} e_{r(n)} \in L_0^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})\right\}.$$

On voit facilement que F est isométrique à $L_0^p(B, \mathfrak{B}, \tilde{X})$ donc isomorphe à $L^p(X)$. Il reste à définir π_1: posons

$$\pi_2\left(\sum_i f_i e_i\right) = \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} E^{\mathfrak{B}}(f_i \mathbf{1}_{\Omega_i})\right) e_{r(n)}.$$

On a

$$\pi_2(f) = E^{\mathfrak{B}}\left(\sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} f_i \mathbf{1}_{\Omega_i} e_{r(n)}\right)$$

donc

$$\|\pi_2 f\| \leqslant \left\|\sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} f_i \mathbf{1}_{\Omega_i} e_{r(n)}\right\|.$$

Pour t fixé il existe un seul indice $p_n \leqslant i_n \leqslant q_n$ tel que $t \in \Omega_{i_n}$

$$\left\| \sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} f_i(t)\mathbf{1}_{\Omega_i}(t)e_{r(n)} \right\|_X = \left\| \sum_{n\geqslant 2} f_{i_n}(t)e_{r(n)} \right\|_X = \left\| \sum_{n\geqslant 2} f_{i_n}(t)e_{i_n} \right\|_X \leqslant \| f(t)\|_X$$

donc en prenant les normes dan L^p on en déduit

$$\|\pi_2 f\| \leqslant \| f \|.$$

Posons

$$\pi_3\Big(\sum_k \lambda_k e_k\Big) = \frac{\mathbf{1}_B}{E^{\mathfrak{B}}(\mathbf{1}_B\varphi_\infty)}\Big(\sum_n \lambda_{r(n)}e_{r(n)}\Big),$$

$$\|\pi_3\| \leqslant 4 \text{ car } \varphi_\infty \geqslant \tfrac{1}{4} \text{ sur } B.$$

Enfin

$$\pi_4\Big(\sum_k \lambda_k e_k\Big) = \sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=p_{r(n)}}^{q_{r(n)}} \mathbf{1}_{\Omega_i}(E^{\mathfrak{B}} - E^{\mathfrak{B}_1})(\lambda_{r(n)}\mathbf{1}_B)e_i.$$

On montre facilement que $\|\pi_4\| \leqslant 2$ et en outre si f est dans F alors il existe λ dans $L_0^p(B, \mathfrak{B}, X)$ tel que $f = \pi_4(\lambda)$, $\|\lambda\| = \| f \|$. Posons alors $\pi_1 = \pi_4 \circ \pi_3 \circ \pi_2$. On a $\|\pi_1\| \leqslant 8$.

Donnons nous f dans F, $f = \pi_4(\lambda)$ avec $\|\lambda\| = \| f \|$

$$\pi_1 Tf - f = \pi_4(\pi_3 \circ \pi_2 Tf - \lambda),$$
$$\|\pi_1 Tf - f\| \leqslant 2\|\pi_3 \circ \pi_2 Tf - \lambda\|.$$

Mais on voit facilement que $\pi_2 Tf = E^{\mathfrak{B}}(Q\lambda)$, et la formule (8) montre que

$$\|\pi_3 \circ \pi_2 Tf - \lambda\| < \frac{\varepsilon}{8} \times 4\|\lambda\| = \frac{\varepsilon}{2}\| f \|.$$

On obtient donc $\|\pi_1 Tf - f\| < \varepsilon\| f \|$.

Ceci achève la démonstration du théorème IV.1.5 dans le cas II.

Le théorème IV.1.1 nous permet, en utilisant la méthode de décomposition de Pelczynski, d'énoncer le théorème suivant

THÉORÈME IV.3.10. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$ *et* X *un espace de Banach à base symétrique, ne vérifiant pas* $\mathcal{P}_p$, *alors* $L^p(X)$ *est primaire.*

En rassemblant les résultats des §§II, III et IV on peut donc affirmer que pour tout espace de Banach à base symétrique et tout $1 \leqslant p < \infty$, $L^p(X)$ est primaire.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, New York, 1953.

2. A. M. Garsia, *Martingale inequalities*, Math. Lecture Notes Series, Benjamin, Reading, Mass., 1973.

3. M. I. Kadec et A. Pelczynski, *Bases-lacunary sequences and complemented subspaces of* L^p, Studia Math. **21** (1962), 161–176.

4. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces* I, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973.

5. B. Maurey, *Sous-espaces complémentés de L^p, d'après P. Enflo*, Séminaire Maurey-Schwartz (1974–75), Centre Math., Ecole Polytech., Paris, 1975.

6. H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l_1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413.

7. _____, *A subsequence splitting result for L^1-bounded sequences of random variables* (en préparation).

8. L. Schwartz, *Propriété de Radon Nikodým*, Séminaire Maurey-Schwartz (1974–75), Centre Math., Ecole Polytech., Paris, 1975.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE