DIMENSION DE HAUSDORFF DES ENSEMBLES DE ZÉROS ET D'INTERPOLATION POUR $A^\infty(D)$

JACQUES CHAUMAT ET ANNE MARIE CHOLLET

RÉSUMÉ. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ à frontière régulière ∂D et soit $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D , indéfiniment dérivables dans $\overline{D}$.

Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction de $A^\infty(D)$ s'annulant seulement sur E . C'est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si, pour toute fonction f de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial}f$ soit plate sur E , il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $F - f$ soit plate sur E .

On construit ici des ensembles de dimension de Hausdorff n . Ce résultat est le meilleur possible dans le cas d'ensembles totalement réels.

Le point de vue utilisé pour montrer qu'un sous-ensemble E de ∂D est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ est de vérifier qu'il a la propriété de division par $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, que, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E , il existe une fonction F de $A^\infty(D)$, plate sur E et nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E , telles que l'on ait, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $f_i = Fk_i$.

Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ à frontière régulière ∂D et soit $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D , indéfiniment dérivables dans $\overline{D}$.

Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction de $A^\infty(D)$ s'annulant seulement sur E . C'est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si, pour toute fonction f de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial}f$ soit plate sur E , il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $F - f$ soit plate sur E .

La motivation essentielle de cette étude a été la recherche d'ensembles de zéros et d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff la plus grande possible. On construit ici des ensembles de dimension de Hausdorff n (Théorème 25). Ce résultat est le meilleur possible dans le cas d'ensembles totalement réels. En effet, on sait [5, 6, 11] qu'un sous-ensemble compact d'une sous-variété V de ∂D , totalement réelle, de dimension n , qui est un ensemble de zéros ou un ensemble d'interpolation pour $A^\infty(D)$ est de mesure n -dimensionnelle nulle dans V . Dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, on construit très simplement des ensembles de zéros pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff n (Chapitre III de [8]). On ignore s'il existe des ensembles de zéros pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff supérieure à n alors que, dans le cas de $A(D)$, B. S. Henriksen a prouvé que leur dimension de Hausdorff peut atteindre $2n - 1$ [9].

Received by the editors October 10, 1985.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 32A30, 32A40; Secondary 32E25 46J15.

©1987 American Mathematical Society
 0002-9947/87 \$1.00 + \$.25 per page

Cet article est divisé en quatre parties. On y fait largement usage d'un théorème de Darboux [1, 12] qui assure, pour tout ouvert ω de ∂D suffisamment petit, l'existence d'une fibration de ω par des sous-variétés N_ζ de dimension réelle $n - 1$, intégrales de la structure de contact sur ∂D , lorsque ζ parcourt un ouvert Q de $\mathbf{R}^n$. On sait [4] que, étant donné un sous-ensemble fermé E d'une sous-variété N intégrale de la structure de contact sur ∂D , il existe une fonction de $A^\infty(D)$ "support" de E , c'est-à-dire, nulle sur E et de partie réelle strictement positive dans $\overline{D} \setminus E$. Dans une première partie, on raffine cette construction. Etant donné un compact E de ω , on établit l'existence d'une famille C^∞ de fonctions H_ζ telle que, pour chaque ζ de Q , H_ζ soit une fonction support du sous-ensemble $E \cap N_\zeta$. Dans une deuxième et une troisième partie on utilise diverses propriétés de recouvrement dans l'ensemble Q des paramètres pour "empiler" les sous-ensembles compacts $E \cap N_\zeta$ afin que l'ensemble E soit un ensemble de zéros (Théorème 10) ou un ensemble d'interpolation d'ordre infini (Théorème 18) pour $A^\infty(D)$. Des méthodes "d'empilement" analogues ont été utilisées dans [8, 9 et 14]. Dans cette étude, les Propositions 9 et 17 qui s'inspirent de travaux antérieurs des auteurs [6, 7] jouent un rôle essentiel. Dans la troisième partie, pour montrer qu'un sous-ensemble E de ∂D est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, on vérifie qu'il a la propriété de division par $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, que, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E , il existe une fonction F de $A^\infty(D)$, plate sur E et nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E , telles que l'on ait, pour tout i dans $\mathbf{N}$, $f_i = Fk_i$. Ce point de vue a déjà été utilisé dans [3 et 7]. La dernière partie est consacrée à l'interprétation des Théorèmes 10 et 18 en termes de dimension de Hausdorff.

1. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, à frontière ∂D de classe C^∞ . D est donc défini par la donnée d'une fonction r de classe C^∞ dans un voisinage de $\overline{D}$, l'adhérence de D , telle que

$$(1.1) \quad D = \{z \in \mathbf{C}^n, r(z) < 0\}$$

$$(1.2) \quad \text{grad } r \neq 0 \quad \text{sur } \partial D,$$

$$(1.3) \quad r \text{ est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de } \partial D.$$

Soit z un point de $\mathbf{C}^n$, on désigne par J la structure presque complexe de $T_z(\mathbf{C}^n)$, l'espace tangent en z à $\mathbf{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Soit M une sous-variété de $\mathbf{C}^n$ et $T_z(M)$ son espace tangent en z ; M est dite totalement réelle si, en tout point z de M , on a $T_z(M) \cap JT_z(M) = \{0\}$.

On note $T_z^c(\partial D)$ l'espace tangent complexe en z à ∂D ; c'est, par définition, le sous-espace complexe maximal de $T_z(\partial D)$, l'espace tangent en z à ∂D . On a donc $\dim_{\mathbf{C}} T_z^c(\partial D) = n - 1$. Si on désigne par $\nu(z)$ le vecteur unitaire de la normale en z à ∂D orienté vers l'extérieur, on a alors la décomposition orthogonale complexe

$$T_z(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}[\nu(z)] \oplus T_z^c(\partial D).$$

Si l'on considère la forme différentielle définie sur ∂D par

$$(1.4) \quad \langle J\nu(z), V \rangle, \quad z \in \partial D, V \in T_z(\partial D),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^{2n}$, on déduit [12] de la stricte pseudoconvexité de D que cette forme est de rang maximum et donc qu'elle définit

une structure de contact sur ∂D . D'après un théorème de Darboux [1], on sait qu'en tout point p de ∂D il existe un système de coordonnées locales réelles $h_1 = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, t)$ défini dans un voisinage ω_1 de p sur ∂D , tel que, en termes de ces coordonnées, la forme différentielle (1.4) s'écrive

$$(1.5) \quad dt - \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i.$$

Le noyau de cette forme différentielle en chaque point z de ∂D n'est autre que $T_z^c(\partial D)$. Les champs de vecteurs $(\partial/\partial x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, et $(\partial/\partial y_i + x_i \partial/\partial t)$, $i = 1, \dots, n-1$, engendrent $T^c(\partial D)$.

Pour tout point p de ∂D , $h = (h_1, r)$ constitue un système de coordonnées locales dans un voisinage ω de p dans $\mathbf{C}^n$. Quitte à réduire ω , à translater et à dilater h on peut supposer de plus $h(\omega) =]-1, 1[^{2n}$, $h(p) = 0$.

Pour tout point p de ∂D , on dit alors que (ω, h) est une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$.

On convient de noter $x = (x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, $\zeta = (y_i, t)$, $i = 1, \dots, n-1$, et Z la projection de $\mathbf{R}^{2n}$ sur $\mathbf{R}^n$ définie par $Z(x, \zeta, r) = \zeta$.

On dit d'une sous-variété N de ∂D dont l'espace tangent est situé en chaque point dans $T^c(\partial D)$ qu'elle est intégrale de la structure de contact sur ∂D .

On note, pour tout couple (z, w) de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, $|z - w|$ la distance euclidienne de z à w et, si E est sous-ensemble de $\mathbf{C}^n$, pour tout z de $\mathbf{C}^n$

$$d(z, E) = \inf_{w \in E} |z - w|.$$

On dit qu'une fonction de classe C^∞ est plate sur un ensemble E si elle s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur E .

De même, on dit qu'une forme différentielle de classe C^∞ est plate sur E si ses coefficients sont plats sur E .

Pour tout sous-ensemble E compact de $\mathbf{R}^N$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on désigne par $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules euclidiennes de rayon ε dont la réunion recouvre E . On sait que l'on peut recouvrir E par des boules de rayon ε dont les centres sont situés sur E , à des distances mutuelles supérieures ou égales à ε et dont le nombre noté $N_\varepsilon(E)$ est équivalent à $\tilde{N}_\varepsilon(E)$. On dira que ces boules forment un ε -recouvrement de E . Pour des références complémentaires sur cette question, on pourra consulter [6, Appendice]. L'espace de nature homogène considéré ici sera exclusivement $\mathbf{R}^N$, muni de la distance euclidienne et de la mesure de Lebesgue.

2. NOTATIONS. Pour simplifier la rédaction, on écrira "pour tout z dans E , $a(z) \approx b(z)$ " ou encore "pour tout z dans E , $a(z)$ est équivalent à $b(z)$ " pour exprimer qu'il existe des constantes c et C , strictement positives, telles que pour tout z dans E , $ca(z) \leq b(z) \leq Ca(z)$. De même, la proposition "pour tout z dans E , $a(z) \ll b(z)$ " signifiera qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout z dans E , $a(z) \leq Cb(z)$. Plus généralement, on pourra écrire " $a(z) \ll b(z) + O(1)$ " lorsqu'il existera des constantes C et C' , strictement positives, telles que, pour tout z dans E , on ait $a(z) \leq Cb(z) + C'$.

Construction d'une famille de fonctions-supports. Etant donné un sous-ensemble compact E de ∂D on dit qu'une fonction f de $A^\infty(D)$ est une fonction-support de E si f s'annule sur E et si sa partie réelle est strictement positive dans $\overline{D} \setminus E$.

3. LEMME. Soit K un compact $\mathbf{R}^N$. Soit f une fonction bornée de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N$, nulle seulement sur K , plate sur K et positive dans $\mathbf{R}^N \setminus K$. Alors, il existe une fonction s de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$(3.1) \quad s^{-1}(0) = K,$$

$$(3.2) \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{sur } \mathbf{R}^N,$$

$$(3.3) \quad \text{Pour tout multi-indice } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \text{ de longueur } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$$

$$D^\alpha s = \frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} = 0 \quad \text{sur } K.$$

$$(3.4) \quad \text{Pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}^N \text{ et tout multi-indice } \alpha \text{ de longueur } |\alpha| \quad |D^\alpha s(x)|^2 \leq C(|\alpha|)s(x).$$

$$(3.5) \quad \text{Pour tout } (p, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^N \quad f(x) \leq C(p)s(x)^p. \text{ On dira que } s \text{ "majore" } f.$$

PREUVE. Elle s'inspire de celle du Lemme V.24 de [13].

A tout entier $r > 0$, on peut associer un entier $\mu(r)$ strictement positif tel que l'on ait

$$(3.6) \quad f(x) \leq d(x, K)^{r^2}, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}^N \text{ vérifiant } d(x, K) \leq 2^{-\mu(r)}.$$

On peut supposer la suite $\mu(r)$ strictement croissante et tendant vers $+\infty$. On note γ la fonction définie sur $\mathbf{R}^N \setminus K$ par

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= r \log \frac{1}{d(x, K)} \quad \text{si } 2^{-\mu(r+1)} < d(x, K) \leq 2^{-\mu(r)}, \\ \gamma(x) &= 1 \quad \text{si } 2^{-\mu(0)} < d(x, K). \end{aligned}$$

Pour chaque entier k , on note $(\zeta_{j,k})$, $j = 1, \dots, N_k$, les centres des boules d'un 2^{-k} -recouvrement de K . Puisque les boules sont supposées centrées sur K , tout point vérifiant $d(x, K) \leq 2^{-k}$ est inclus dans au moins une boule de centre $\zeta_{j,k}$ et de rayon $3 \cdot 2^{-k}$ et dans au plus M boules de centre $\zeta_{j,k}$ et de rayon $4 \cdot 2^{-k}$. (M est une constante ne dépendant que de la dimension N de $\mathbf{R}^N$.)

Soit χ une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N$, positive, à support dans la boule de centre 0 et de rayon 4, vérifiant $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 3$.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'entiers croissante tendant vers $+\infty$ vérifiant

$$(3.7) \quad \lambda_k \leq r, \quad \text{si } \mu(r) \leq k < \mu(r+1),$$

$$(3.8) \quad \lambda_{k+2} \leq 2\lambda_k, \quad \text{pour tout } k,$$

$$(3.9) \quad \lambda_k \leq k, \quad \text{pour tout } k.$$

Soit σ la fonction définie sur $\mathbf{R}^N$ par

$$(3.10) \quad \sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{N_k} \chi[2^k(x - \zeta_{j,k})].$$

C'est une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N \setminus K$.

Soit x un point de $\mathbf{R}^N \setminus K$ tel que $d(x, K) < 1/4$. Il existe un entier k_x tel que l'on ait

$$(3.11) \quad 2^{-k_x-1} < d(x, K) \leq 2^{-k_x}.$$

Pour chaque k , $k \leq k_x$, il existe $\zeta_{j(x),k}$ tel que l'on ait $\chi[2^k(x - \zeta_{j(x),k})] = 1$. On a donc

$$\sigma(x) \geq \sum_{k=0}^{k_x} \lambda_k \geq \lambda_{[k_x/2]} k_x / 2.$$

Ici $[k_x/2]$ désigne la partie entière de $k_x/2$. On déduit de là, en utilisant (3.11), qu'il existe une fonction $\omega(t)$ positive tendant vers $+\infty$ quand t tend vers 0, telle que l'on ait

$$(3.12) \quad \sigma(x) \geq \omega[d(x, K)] \log \frac{1}{d(x, K)}.$$

Pour tout k , $k \geq k_x + 2$ et pour tout j , $j = 1, \dots, N_k$, on a $\chi[2^k(x - \zeta_{j,k})] = 0$. On a donc, d'après (3.8)

$$\sigma(x) \leq M \sum_{k=0}^{k_x+2} \lambda_k \leq M(k_x + 3) \lambda_{k_x+2} \leq 2M(k_x + 3) \lambda_{k_x}$$

et de là, en utilisant (3.7) et (3.11)

$$(3.13) \quad \sigma(x) \leq 8M\gamma(x).$$

On a, pour tout multi-indice α ,

$$D^\alpha \sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{N_k} D^\alpha \chi[2^k(x - \zeta_{j,k})]$$

et donc

$$\begin{aligned} |D^\alpha \sigma(x)| &\leq C(|\alpha|) M \sum_{k=0}^{k_x+2} \lambda_k (2^k)^{|\alpha|} \\ &\leq C(|\alpha|) M(k_x + 3) 2\lambda_{k_x} (2^{k_x+2})^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

De là, en utilisant (3.9) et (3.11), on obtient

$$(3.14) \quad |D^\alpha \sigma(x)| \leq C(|\alpha|) [d(x, K)]^{-(|\alpha|+1)}.$$

On considère la fonction $s = \exp -\sigma$. Elle est de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N \setminus K$. On a, d'après (3.12) et (3.14),

$$\begin{aligned} |D^\alpha s(x)|^2 &\leq C(|\alpha|) [d(x, K)]^{-4|\alpha|} \exp[-2\sigma(x)] \\ &\leq C(|\alpha|) \exp[-\sigma(x)]. \end{aligned}$$

Ceci prouve que s admet un prolongement C^∞ à $\mathbf{R}^N$ vérifiant les propriétés (3.1) à (3.4).

Pour établir (3.5), on remarque que pour tout p entier et tout x de $\mathbf{R}^N$ vérifiant $2^{-\mu(r+1)} < d(x, K) \leq 2^{-\mu(r)}$ on a, d'après (3.6) et (3.13)

$$f(x)[s(x)]^{-p} = f(x) \exp[-p\sigma(x)] \leq d(x, K)^{r^2} \exp[-8Mp\gamma(x)]$$

donc

$$f(x)[s(x)]^{-p} \leq d(x, K)^{r^2-8Mpr}$$

Lorsque x tend vers K , la limite de $f(x)[s(x)]^{-p}$ est nulle; il existe donc une constante $C_p > 0$ telle que l'on ait

$$f(x)[s(x)]^{-p} \leq C(p).$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.

4. Soit p un point de ∂D , (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$; on note, pour tout ζ de $] -1, 1[^n$,

$$(4.1) \quad N_\zeta = h^{-1}[\{(x, \zeta, 0); x \in] -1, 1[^n\}].$$

On vérifie que N_ζ est une sous-variété de ∂D intégrale de la structure de contact sur ∂D . Soit z un point de ω , on note, pour tout ζ de $] -1, 1[^n$

$$(4.2) \quad n_\zeta(z) = (x(z), \zeta, 0)$$

et

$$(4.3) \quad P_\zeta(z) = h^{-1}(n_\zeta(z)).$$

5. LEMME. Soit p un point de ∂D , (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$ et K un compact de $\mathbf{R}^{2n-1} \times \{0\}$ inclus dans $h(\omega) =] -1, 1[^{2n}$. Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, nulle seulement sur K , plate sur K et positive dans $\mathbf{R}^{2n} \setminus K$ et s une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, plate sur K et "majorant" f dont l'existence est assurée par le Lemme 3.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et $K \subset] -a, a[^{2n-1} \times \{0\}$. Il existe une fonction $H(\zeta; z)$ holmorphe en z dans D de classe C^∞ dans $[-a, a]^n \times \overline{D}$ telle que l'on ait, pour tout ζ de $[-a, a]^n$,

$$(5.1) \quad H(\zeta; z) = s(x(z), \zeta, 0) \quad \text{si } z \text{ appartient à } N_\zeta \cap \omega,$$

$$(5.2) \quad H(\zeta; z) = 0 \text{ si et seulement si } z \text{ appartient à } N_\zeta \cap h^{-1}(K),$$

$$(5.3) \quad \operatorname{Re} H(\zeta, z) \geq 0, \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{D},$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} H(\zeta, z) &\approx -r(z) + d(z, N_\zeta)^2 + s(x(z), \zeta, 0) \\ &\approx -r(z) + |\zeta(z) - \zeta|^2 + s(x(z), \zeta, 0) \end{aligned}$$

pour tout z de $\omega \cap \overline{D}$,

$$(5.5) \quad \begin{aligned} |H(\zeta, z)| &\approx \operatorname{Re} H(\zeta, z) + |\langle J\nu(P_\zeta(z)), P_\zeta(z) - z \rangle| \\ &\approx \operatorname{Re} H(\zeta, z) + |t - t(z) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(z)(y_i - y_i(z))| \end{aligned}$$

pour tout z de $\omega \cap \overline{D}$.

PREUVE. Soit a un réel, $0 < a < 1$, tel que K soit inclus dans $] -a, a[^{2n} \times \{0\}$.

On note

$$\Omega(\zeta, a, \varepsilon) = h^{-1}[\{(x, \zeta', r); x \in] -a, a[^n, |\zeta - \zeta'| < \varepsilon, |r| < \varepsilon\}].$$

Pour tout ς de $[-a, a]^n$, on applique la Proposition 24 de [4] à la sous-variété N_ς . On peut vérifier alors qu'il existe des constantes c_1 et ε_1 strictement positives et indépendantes de ς et de z telles que, si on note $\Omega_\varsigma^1 = \Omega(\varsigma, a, \varepsilon_1)$, on ait, pour tout ς de $[-a, a]^n$, une fonction $F(\varsigma, z)$ de classe C^∞ dans $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a, a]^n, z \in \Omega_\varsigma^1\}$ vérifiant

$$(5.6) \quad F(\varsigma, z) = 0 \text{ si } z \text{ appartient à } N_\varsigma \cap \Omega_\varsigma^1,$$

$$(5.7) \quad \bar{\partial}_z F = 0 \text{ à l'ordre infini si } z \text{ appartient à } N_\varsigma \cap \Omega_\varsigma^1,$$

$$(5.8) \quad \operatorname{Re} F(\varsigma, z) \geq c_1[d(z, N_\varsigma)^2 - r(z)], \text{ pour tout } z \text{ de } \Omega_\varsigma^1 \cap \bar{D},$$

$$(5.9) \quad \operatorname{grad} \operatorname{Re} F(\varsigma, z) = -\nu(z) \text{ si } z \text{ appartient à } N_\varsigma \cap \Omega_\varsigma^1.$$

On considère maintenant, pour tout ς de $[-a, a]^n$, la restriction de $s \circ h^{-1}$ à N_ς . On vérifie, en suivant les idées de la preuve de la Proposition 31 de [4] que cette fonction admet, pour tout ς de $[-a, a]^n$, une extension $S(\varsigma, z)$ de classe C^∞ dans $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a, a]^n, z \in \omega\}$ qui satisfait aux conditions suivantes: il existe des constantes, ε_2, C, C' et c_2 strictement positives, indépendantes de ς et de z , telles que l'on ait, pour tout ς de $[-a, a]^n$,

$$(5.10) \quad S(\varsigma, z) = s \circ h^{-1}(z) \text{ si } z \text{ appartient à } N_\varsigma \cap \Omega_\varsigma^2,$$

$$(5.11) \quad \bar{\partial}_z S = 0 \text{ à l'ordre infini sur } N_\varsigma \cap \Omega_\varsigma^2,$$

$$(5.12) \quad \operatorname{Re} S(\varsigma, z) \geq s(x(z), \varsigma, 0) - c_2 d(z, N_\varsigma)^2, \text{ pour tout } z \text{ dans } \Omega_\varsigma^2 \cap \bar{D},$$

$$(5.13) \quad |\operatorname{grad} S(\varsigma, z)|^2 \leq C |\operatorname{grad} s(x(z), \varsigma, 0)|^2 \leq C' s(x(z), \varsigma, 0),$$

pour tout z appartenant à $N_\varsigma \cap \Omega_\varsigma^2$.

Soit $\Omega_\varsigma = \Omega_\varsigma^1 \cap \Omega_\varsigma^2$. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout ς de $[-a, a]^n$, la fonction G définie par $G(\varsigma, z) = F(\varsigma, z) + cS(\varsigma, z)$ est de classe C^∞ dans $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a, a]^n, z \in \Omega_\varsigma\}$ et vérifie, pour tout ς de $[-a, a]^n$ et tout z de $\Omega_\varsigma \cap \bar{D}$,

$$(5.14) \quad \operatorname{Re} G(\varsigma, z) \approx -r(z) + d(z, N_\varsigma)^2 + s(x(z), \varsigma, 0),$$

$$(5.15) \quad |G(\varsigma, z)| \approx \operatorname{Re} G(\varsigma, z) + |\langle J\nu(P_\varsigma(z)), P_\varsigma(z) - z \rangle|.$$

De (5.8) et (5.12), on déduit la minoration de $\operatorname{Re} G(\varsigma, z)$. Les autres estimations sont des conséquences de la formule de Taylor appliquée entre z et $P_\varsigma(z)$, compte tenu de la propriété (3.4) de s . On détaille seulement ici la minoration de $|G(\varsigma, z)|$. On a, sur $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a, a]^n, z \in \Omega_\varsigma\}$,

$$\operatorname{Im} G(\varsigma, z) = \operatorname{Im} F(\varsigma, z) + c \operatorname{Im} S(\varsigma, z),$$

$$\operatorname{Im} F(\varsigma, z) = \langle J\nu(P_\varsigma(z)), z - P_\varsigma(z) \rangle + O|z - P_\varsigma(z)|^2,$$

$$\operatorname{Im} S(\varsigma, z) = \langle \operatorname{grad} \operatorname{Im} S(\varsigma, P_\varsigma(z)), z - P_\varsigma(z) \rangle + O|z - P_\varsigma(z)|^2,$$

et donc d'après (3.4)

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} S(\varsigma, z)| &\ll |\operatorname{grad} s(x(z), \varsigma, 0)|^2 + |z - P_\varsigma(z)|^2 \\ &\ll s(x(z), \varsigma, 0) + |z - P_\varsigma(z)|^2. \end{aligned}$$

De là, on a

$$|\operatorname{Im} G(\varsigma, z)| \gg |\langle J\nu(P_\varsigma(z)), z - P_\varsigma(z) \rangle| - |z - P_\varsigma(z)|^2 - s(x(z), \varsigma, 0).$$

Ensuite, on écrit

$$|G(\zeta, z)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} G(\zeta, z) + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |\operatorname{Im} G(\zeta, z)|, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

et en remarquant que $|P_\zeta(z) - z|$ est équivalent à $d(z, N_\zeta)$ on peut choisir β suffisamment petit pour que l'on ait

$$|G(\zeta, z)| \gg \operatorname{Re} G(\zeta, z) + |\langle J\nu(P_\zeta(z)), P_\zeta(z) - z \rangle|.$$

Compte tenu des propriétés (5.7) et (5.11), on corrige $G(\zeta, z)$ en résolvant comme dans le Théorème 21 de [4] un problème de $\bar{\partial}$. On obtient alors une fonction $H(\zeta, z)$ holomorphe en z dans D , de classe C^∞ dans $[-a, a]^n \times \bar{D}$ telle que

$$(5.16) \quad \operatorname{Re} H(\zeta, z) > 0 \quad \text{sur } \{(\zeta, z); \zeta \in [-a, a]^n, z \in \bar{D} \setminus h^{-1}(K) \cap N_\zeta\}.$$

Il existe de plus une fonction $u(\zeta, z)$ de partie réelle strictement négative et de classe C^∞ dans $[-a, a]^n \times \bar{D}$ et des réels a' et ε' , $0 < a' < a$ et $0 < \varepsilon' < \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tels que sur $\Omega'_\zeta = \Omega(\zeta, a', \varepsilon')$, on ait

$$H(\zeta, z) = \frac{G(\zeta, z)}{1 - u(\zeta, z)G(\zeta, z)}.$$

Des propriétés de G et de u , on déduit qu'il existe ε'' et a'' , $0 < \varepsilon'' < \varepsilon'$ et $0 < a'' < a'$, tels que, si on note $\Omega''_\zeta = \Omega(\zeta, a'', \varepsilon'')$, on ait

$$|1 - u(\zeta, z)G(\zeta, z)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{sur } \{(\zeta, z); \zeta \in [-a, a]^n, z \in \Omega''_\zeta\}.$$

On déduit, de là, des estimations analogues à (5.14) et (5.15) portant sur H au lieu de G , avec des constantes indépendantes de ζ et de z , pour tout ζ de $[-a, a]^n$ et tout z de $\Omega''_\zeta \cap \bar{D}$. Puisque, d'après (5.16), il existe $m > 0$ tel que

$$\operatorname{Re} H(\zeta, z) \geq m \quad \text{sur } \{(\zeta, z), \zeta \in [-a, a]^n, z \in \bar{D} \setminus \Omega''_\zeta\},$$

les estimations (5.4) et (5.5) sont satisfaites sur $\{(\zeta, z); \zeta \in [-a, a]^n, z \in \omega \cap \bar{D}\}$. Ces estimations ont des formes différentes mais équivalentes selon qu'on les écrive ou non en fonction des coordonnées locales sur ω .

Ensembles de zéros.

6. DÉFINITION. Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que $E = \{z \in \bar{D}; f(z) = 0\}$.

7. Dans tout ce qui suit, (ω, h) désigne une carte de Darboux au voisinage d'un point p de ∂D et K un compact de $]-1, 1[^{2n-1} \times \{0\}$ inclus donc dans $h(\omega)$. On note $E = Z(K)$. On rappelle que Z est la projection définie dans $\mathbf{R}^{2n}$ par $Z(x, \zeta, r) = \zeta$.

8. Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, nulle seulement sur K , plate sur K et positive dans $\mathbf{R}^{2n} \setminus K$. Soit s une fonction qui majore f , plate sur K , dont l'existence est assurée par le Lemme 3. On note par $\delta(z, K)$ la fonction définie pour tout z de $\bar{D}$ par

$$(8.1) \quad \delta(z, K) = \inf_{\zeta \in E} [|\zeta(z) - \zeta| + s(x(z), \zeta, 0) - r(z)]$$

si z appartient à ω ,

$$(8.2) \quad \delta(z, K) = 1 \quad \text{si } z \text{ n'appartient pas à } \omega.$$

Clairement $\delta(z, K)$ tend vers 0, lorsque z tend vers $h^{-1}(K)$.

La définition de δ , comme celle de H et de s , dépend du choix de la fonction f . Les résultats établis dans les paragraphes 9 à 17 ne nécessiteront aucun choix particulier de f . On suppose donc une telle fonction choisie une fois pour toutes. Par contre pour établir le Théorème 18 il faudra utiliser pour définir s , H et δ une fonction f particulière qui sera précisée dans la preuve.

9. PROPOSITION. Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage d'un point p de ∂D et K un compact de $] -1, 1[^{2n-1} \times \{0\}$ inclus dans $h(\omega)$ tel que, si on note $E = Z(K)$, on ait

$$(9.1) \quad \int_0^1 N_\varepsilon(E) d\varepsilon < \infty;$$

alors il existe une fonction φ holomorphe dans D , de classe C^∞ et de partie réelle strictement positive dans $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$ qui vérifie les propriétés suivantes

(a) il existe une constante $c_1 > 0$ telle que, pour tout z de $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$, on ait

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \geq \omega[\delta(z, K)] \log \frac{1}{c_1 \delta(z, K)}$$

où $\omega(x)$ est une fonction de x , à valeurs positives qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0,

(b) pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $D \setminus h^{-1}(K)$, on ait

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} \varphi(z) \right| = |D^\alpha \varphi(z)| \leq C(|\alpha|) \delta(z, K)^{-2(|\alpha|+1)}.$$

PREUVE. Puisque $N_\varepsilon(E)$ est équivalente à une fonction décroissante de ε , la condition (9.1) est équivalente à la condition

$$(9.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} N_{2^{-k}}(E) 2^{-k} < \infty.$$

Il existe alors une suite croissante λ_k de réels positifs tendant vers $+\infty$ tels que, si l'on note $N_k = N_{2^{-k}}(E)$, l'on ait

$$(9.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_k 2^{-k} < \infty.$$

Soit φ la fonction définie pour tout z dans D par

$$(9.4) \quad \varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_k \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)}$$

où H est la fonction introduite dans le Lemme 5 et où, pour chaque entier k , $(\zeta_{j,k})$, $j = 1, \dots, N_k$, désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_k$, d'un 2^{-k} -recouvrement de E . Des propriétés de H , on déduit que l'on a, pour tout z dans ω et tout indice (j, k) ,

$$|2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)| \geq |H(\zeta_{j,k}, z)| \geq -r(z) + |\zeta(z) - \zeta_{j,k}|^2 + s(x(z), \zeta_{j,k}, 0)$$

et donc, puisque $\zeta_{j,k}$ appartient à E ,

$$(9.5) \quad |2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)| \gg \inf_{\zeta \in E} [|\zeta(z) - \zeta| + s(x(z), \zeta, 0) - r(z)]^2.$$

On conclut alors d'après (8.1)

$$(9.6) \quad |2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)| \gg \delta(z, K)^2.$$

De (9.3), (9.6) et des propriétés de H , on déduit que φ est holomorphe dans D , de classe C^∞ dans $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$ et que, pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\omega \setminus h^{-1}(K)$, on ait

$$(9.7) \quad |D^\alpha \varphi(z)| \leq C(|\alpha|) \delta(z, K)^{-2(|\alpha|+1)}.$$

Il reste donc à établir la minoration de la partie réelle de φ . Soit donc z un point de $\omega \setminus h^{-1}(K)$ vérifiant $\delta(z, K) < \frac{1}{4}$; il existe alors un entier $k_z > 1$ tel que l'on ait

$$(9.8) \quad 2^{-k_z-1} < \delta(z, K) \leq 2^{-k_z}.$$

On considère w^z un point de E qui vérifie

$$(9.9) \quad \delta(z, K) = |\zeta(z) - w^z| + s(x(z), w^z, 0) - r(z).$$

Alors, pour chaque entier k , w^z appartient à au moins une boule du 2^{-k} -recouvrement de E . De la positivité de $\operatorname{Re} H$, on déduit que l'on peut minorer $\operatorname{Re} \varphi$ en ne gardant, pour chaque k , dans la sommation portant sur j , qu'une seule boule du 2^{-k} -recouvrement; on garde une des boules qui contiennent w^z et on désigne son centre par ζ_k^z . On a donc

$$(9.10) \quad \operatorname{Re} \varphi(z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \operatorname{Re} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\zeta_k^z, z)}.$$

Pour tout k , on applique la formule de Taylor à $H(\zeta_k^z, z)$ entre z et $P_{\zeta_k^z}(z) = h^{-1}(x(z), \zeta_k^z, 0)$. Compte-tenu de (5.1), on a, pour tout $k \geq 1$,

$$|H(\zeta_k^z, z) - s(x(z), \zeta_k^z, 0)| \ll |\zeta(z) - \zeta_k^z| - r(z).$$

On a aussi

$$|s(x(z), \zeta_k^z, 0) - s(x(z), w^z, 0)| \ll |\zeta_k^z - w^z|$$

et donc

$$\begin{aligned} |H(\zeta_k^z, z)| &\ll s(x(z), w^z, 0) + |\zeta(z) - \zeta_k^z| + |\zeta_k^z - w^z| - r(z) \\ &\ll s(x(z), w^z, 0) + |\zeta(z) - w^z| + |w^z - \zeta_k^z| - r(z). \end{aligned}$$

De là, d'après la définition (9.9) de w^z , on a, pour tout k ,

$$|H(\zeta_k^z, z)| \ll \delta(z, K) + 2^{-k}$$

et donc, d'après (9.8)

$$|H(\zeta_k^z, z)| \ll 2^{-k_z} + 2^{-k}.$$

On a alors, pour tout k , $k \leq k_z$,

$$|H(\zeta_k^z, z)| \ll 2^{-k}.$$

On déduit de là, que, pour tout z de $\omega \setminus h^{-1}(K)$ et pour tout k , $k \leq k_z$, on a

$$\operatorname{Re} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(s_k^z, z)} \gg 1.$$

Toujours d'après la positivité de $\operatorname{Re} H$, en utilisant (9.10), on conclut, si on note $[a]$ la partie entière de a ,

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \gg \sum_{k=[k_z/2]}^{k_z} \lambda_k \gg \frac{k_z}{2} \lambda_{[k_z/2]}.$$

De (9.8), on déduit

$$k_z \approx \log \frac{1}{\delta(z, K)} \quad \text{et} \quad \lambda_{[k_z/2]} = \omega(\delta(z, K))$$

où $\omega(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, d'après la définition de la suite λ_k .

Ceci achève la preuve de la Proposition 9, compte tenu de la définition de $\delta(z, K)$ lorsque z n'appartient pas à ω .

10. THÉOREME. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞ et p un point de ∂D . Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$ et K un compact de $] -1, 1[^{2n-1} \times \{0\}$ tel que, si on note $E = Z(K)$, on ait*

$$(10.1) \quad \int_0^1 N_\varepsilon(E) d\varepsilon < \infty;$$

alors $h^{-1}(K)$ est un sous-ensemble fermé de ∂D qui est l'ensemble des zéros d'une fonction L de $A^\infty(D)$. De plus, $h^{-1}(K)$ est l'ensemble des zéros communs à L et à toutes ses dérivées.

PREUVE. Soit φ la fonction introduite dans la Proposition 9. Alors, si on pose $L(z) = \exp -\varphi(z)$, L est holomorphe dans D , de classe C^∞ dans $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$. En appliquant une formule de dérivation des fonctions composées, on vérifie comme dans [6] que, pour tout multi-indice α , il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$, on ait

$$|D^\alpha L(z)| \leq C(|\alpha|) |L(z)| \delta(z, K)^{-4|\alpha|}$$

et, de là, d'après la conclusion (a) de la Proposition 9

$$|D^\alpha L(z)| \leq C(|\alpha|) [\delta(z, K)]^{\omega(\delta(z, K)) - 4|\alpha|}.$$

On en déduit alors que L se prolonge en une fonction de $A^\infty(D)$ nulle seulement sur $h^{-1}(K)$ et dont toutes les dérivées s'annulent sur $h^{-1}(K)$.

Division et interpolation.

11. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D . On note C_E^∞ [resp. A_E^∞] l'idéal de $C^\infty(\overline{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur E .

Un sous-ensemble fermé E de ∂D vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$ si et seulement si pour toute famille $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de fonctions de C_E^∞ , il existe une fonction F de A_E^∞ , nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = F k_i$, pour tout i dans $\mathbf{N}$.

Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si pour toute fonction g de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\bar{\partial}g$ soit plate sur E , il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que $f - g$ soit plate sur E .

12. PROPOSITION [7]. *Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ s'il vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

13. PROPOSITION [7]. *Une réunion finie de sous-ensembles fermés de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

14. LEMME DE DIVISION PAR $C^\infty(\bar{D})$ [7, 13]. *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D et $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille de fonctions de C_E^∞ . Alors il existe une fonction g de C_E^∞ positive et ne s'annulant que sur E et des fonctions $(h_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = gh_i$, pour tout i dans $\mathbf{N}$.*

Si, de plus, f est une fonction de C_E^∞ ne s'annulant que sur E telle que l'on ait $g \ll |f|$, alors, il existe des fonctions $(k_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = fk_i$, pour tout i dans $\mathbf{N}$.

15. LEMME. *Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage d'un point p de ∂D et $\gamma:]-1, 1[\rightarrow Z[]-1, 1[^{2n}$ une courbe de classe C^∞ vérifiant $\gamma(0) = 0$ telle que, si on note $M = \{(x, \zeta, r); x \in]-1, 1[^{n-1}, \zeta \in \gamma[]-1, 1[, r = 0\}$, M vérifie la propriété suivante:*

(15.1) *l'espace tangent à M n'est pas dans le noyau de la forme différentielle $dt - \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i$.*

Soit K un sous-ensemble compact de M . Soient a et b deux nombres réels, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, vérifiant

$$(15.2) \quad K \subset \{(x, \zeta, 0), x \in]-a, a[^{n-1}, \zeta \in \gamma[]-b, b[)\} \subset]-a, a[^{2n-1} \times \{0\}.$$

Soit $H(\zeta, z)$ la fonction construite dans le Lemme 5. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ relativement compact de $h^{-1}(K)$ dans ω et une application π de classe C^∞ de $\mathcal{O}$ dans $\gamma[]-b, b[$ tels que l'on ait

$$(15.3) \quad \pi(z) = \zeta(z) \text{ si } z \text{ appartient à } \mathcal{O} \cap h^{-1}(M) \text{ et}$$

$$(15.4) \quad |H(\gamma(u), z)| \approx \operatorname{Re} H(\gamma(u), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|$$

pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \bar{D}$ et tout u dans $] -b, b[$.

PREUVE. Pour tout u de $] -1, 1[$ on note $\gamma(u) = (y_i(u), t(u))$, $i = 1, \dots, n-1$, et on pose, pour tout u de $] -1, 1[$ et tout z dans ω ,

$$I(u, z) = t(u) - t(z) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(z)(y_i(u) - y_i(z)).$$

Si $h(z)$ appartient à M , il existe une unique valeur de u dans $] -1, 1[$ notée u_z telle que l'on ait $\zeta(z) = \gamma(u_z)$. On a alors $I(u_z, z) = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial u} I(u, z)|_{u=u_z} = t'(u_z) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(z)y'_i(u_z).$$

On note

$$M_1 = \{(x, \zeta, 0); x \in]-a, a[^n, \zeta \in \gamma[]-b, b[)\}.$$

L'hypothèse (15.1) faite sur M implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour tout z dans $h^{-1}(M_1)$,

$$(15.5) \quad \left| \frac{\partial}{\partial u} I(u, z) \Big|_{u=u_z} \right| \geq c.$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $I(u, z)$. Il existe donc un voisinage $\mathcal{O}$ relativement compact de $h^{-1}(K)$ dans ω , contenant $h^{-1}(M_1)$ et une application p de $\mathcal{O}$ dans $] -1, 1[$ de classe C^∞ telle que l'on ait

$$(15.6) \quad I(p(z), z) = 0 \quad \text{pour tout } z \text{ de } \mathcal{O},$$

$$(15.7) \quad p(z) = u_z \quad \text{pour tout } z \text{ de } h^{-1}(M_1).$$

On note π l'application définie par $\pi(z) = \gamma(p(z))$. Quitte à réduire $\mathcal{O}$, c'est une application de classe C^∞ de $\mathcal{O}$ sur $\gamma[]-b, b[$.

Pour tout z de $\mathcal{O}$, un développement de Taylor de $I(u, z)$ au voisinage de $u = p(z)$ conduit d'après (15.6) à

$$(15.8) \quad I(u, z) = [u - p(z)] \frac{\partial}{\partial u} I(p(z), z) + O(|u - p(z)|^2).$$

On peut réduire $\mathcal{O}$ en sorte que, d'après (15.5), on ait, pour tout z de $\mathcal{O}$,

$$(15.9) \quad \left| \frac{\partial}{\partial u} I(p(z), z) \right| \geq \frac{c}{2}.$$

On déduit alors de (15.8) et de (15.9) qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que $|u - p(z)| < \eta$ implique $|I(u, z)| \gg |u - p(z)|$. On a clairement, par ailleurs, $|I(u, z)| \ll |u - p(z)|$. De la régularité de γ , on conclut donc qu'il existe une constante $\eta' > 0$ telle que, pour tout z de $\mathcal{O}$ et tout u de $] -b, b[$ vérifiant $|\gamma(u) - \pi(z)| < \eta'$, on ait

$$(15.10) \quad |I(u, z)| \approx |\gamma(u) - \pi(z)|$$

et donc, si H est la fonction associée au compact K introduite dans le Lemme 5, d'après (5.5), pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout u de $] -b, b[$ vérifiant $|\gamma(u) - \pi(z)| < \eta'$,

$$(15.11) \quad |H(\gamma(u), z)| \approx \operatorname{Re} H(\gamma(u), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|.$$

Pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout u dans $] -b, b[$ vérifiant $|\gamma(u) - \pi(z)| \geq \eta'$ l'équivalence (15.11) est trivialement vérifiée car $H(\gamma(u), z)$ ne peut s'annuler que si $\zeta(z) = \gamma(u)$ et dans ce cas $\zeta(z) = \pi(z)$. Ceci établit donc (15.4).

16. COROLLAIRE. Les notations et les hypothèses sont celles du Lemme 15. On note, pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout ζ dans $] -1, 1[^n$,

$$(16.1) \quad \theta(\zeta, z) = |\zeta(z) - \zeta|^2 + s(x(z), \zeta, 0) - r(z).$$

On a alors, pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et pour tout u dans $] -b, b[$,

$$(16.2) \quad |H(\gamma(u), z)| \approx \theta(\pi(z), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|,$$

$$(16.3) \quad \operatorname{Re} H(\gamma(u), z) \ll \theta(\pi(z), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|^2.$$

PREUVE. De (15.4) et de (5.4) on déduit que, pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout u dans $] -b, b[$, on a

$$(16.4) \quad \operatorname{Re} H(\gamma(u), z) \approx |\zeta(z) - \gamma(u)|^2 + s(x(z), \gamma(u), 0) - r(z)$$

et

$$(16.5) \quad |H(\gamma(u), z)| \approx |\zeta(z) - \gamma(u)|^2 + s(x(z), \gamma(u), 0) - r(z) + |\gamma(u) - \pi(z)|.$$

On note pour tout z fixé dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$

$$(16.6) \quad \tau(\zeta) = s(x(z), \zeta, 0) + |\zeta(z) - \zeta|^2 - r(z).$$

On applique une formule de Taylor à la fonction τ entre $\gamma(u)$ et $\pi(z)$. On a alors

$$\tau(\gamma(u)) = \tau(\pi(z)) + \langle \operatorname{grad} \tau(\pi(z)), \gamma(u) - \pi(z) \rangle + O(|\gamma(u) - \pi(z)|^2),$$

d'où

$$\tau(\gamma(u)) \leq \tau(\pi(z)) + |\operatorname{grad} \tau(\pi(z))| |\gamma(u) - \pi(z)| + O(|\gamma(u) - \pi(z)|^2),$$

et donc, puisque d'après la définition de (16.6) de τ on a

$$|\operatorname{grad} \tau(\pi(z))| \leq |\operatorname{grad} s(x(z), \pi(z), 0)| + 2|\pi(z) - \zeta(z)|,$$

on conclut, en utilisant la propriété (3.4) de s , à l'ordre 1,

$$(16.7) \quad \tau(\gamma(u)) \ll \tau(\pi(z)) + |\gamma(u) - \pi(z)|^2.$$

Ceci, compte tenu de (16.4), (16.5) et (16.6), établit (16.3) ainsi que la majoration de $|H(\gamma(u), z)|$ dans (16.2).

Pour obtenir la minoration de $|H(\gamma(u), z)|$, on échange les rôles joués par $\gamma(u)$ et $\pi(z)$. On a

$$(16.8) \quad \tau(\gamma(u)) \gg \tau(\pi(z)) - |\gamma(u) - \pi(z)|^2$$

et, d'après (16.5) et (16.6)

$$|H(\gamma(u), z)| \gg \frac{1}{2} \tau(\gamma(u)) + |\gamma(u) - \pi(z)|,$$

ce qui donne en utilisant (16.8)

$$|H(\gamma(u), z)| \gg \tau(\pi(z)) + |\gamma(u) - \pi(z)|.$$

Ceci achève la preuve de (16.2).

17. PROPOSITION. *Les notations et les hypothèses sont toujours celles du Lemme 15. On note E la projection $Z(K)$ de K sur $\gamma([-b, b])$ et on suppose de plus que l'on a*

$$(17.1) \quad \int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E) d\varepsilon \ll r \left(\log \frac{1}{r} + O(1) \right),$$

pour tout r , $0 < r < 1$, et toute boule euclidienne B_r de rayon r centrée sur E .

Il existe alors une fonction ψ holomorphe dans D , de classe C^∞ dans $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$ qui vérifie les estimations suivantes

$$(17.2) \quad \operatorname{Re} \psi(z) \gg \log \frac{1}{\delta(z, K)} + O(1), \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{D} \setminus h^{-1}(K),$$

$$(17.3) \quad \operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\delta(z, K)} + O(1), \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{D} \setminus h^{-1}(K),$$

$$(17.4) \quad |D^\alpha \psi(z)| \ll C(|\alpha|) \delta(z, K)^{-2(|\alpha|+1)}, \text{ pour tout multi-indice de longueur } |\alpha| \text{ et tout } z \text{ de } \overline{D} \setminus h^{-1}(K)$$

($\delta(z, K)$ a été défini dans le paragraphe 8).

PREUVE. La condition (17.1) implique la condition (9.1), à savoir $\int_0^1 N_\varepsilon(E) d\varepsilon < \infty$, qui s'écrit encore avec la notation $N_k = N_{2^{-k}}(E)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} N_k < \infty.$$

Soit ψ la fonction définie sur D par

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)}$$

où H est la fonction introduite dans le Lemme 5 et où, pour chaque entier k , $(\zeta_{j,k})$, $j = 1, \dots, N_k$, désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_k$, d'un 2^{-k} -recouvrement de E . On sait que, par définition, $\zeta_{j,k}$ appartient à E . On vérifie, comme dans la preuve de la Proposition 9, que ψ est holomorphe dans D , de classe C^∞ et de partie réelle strictement positive dans $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$ et satisfait aux estimations (17.2) et (17.4) de la proposition.

On se propose maintenant d'obtenir l'estimation (17.3). On a, pour tout z de $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$,

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \operatorname{Re} H(\zeta_{j,k}, z)}{|2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)|^2}.$$

De là, en utilisant le Corollaire 16, si z est dans θ et si on suppose que l'on a $\theta(\pi(z), z) \leq 1$, on obtient

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \theta(\pi(z), z) + |\zeta_{j,k} - \pi(z)|^2}{2^{-2k} + \theta(\pi(z), z)^2 + |\zeta_{j,k} - \pi(z)|^2}$$

et donc

$$(17.5) \quad \operatorname{Re} \psi(z) \ll O(1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \theta(\pi(z), z)}{2^{-2k} + \theta(\pi(z), z)^2 + |\zeta_{j,k} - \pi(z)|^2}.$$

La majoration (17.5) ainsi obtenue est semblable à la majoration (9.4) obtenue dans [7]; on poursuit la preuve de façon analogue en faisant jouer à $\theta(\pi(z), z)$ le rôle joué par $\rho(\pi(z), z)$ dans [7].

On considère deux cas en notant

$$(17.6) \quad \theta(E, z) = \inf_{\zeta \in E} \theta(\zeta, z).$$

Premier cas: $\theta(\pi(z), z) > \theta(E, z)^2$. On obtient alors en poursuivant le calcul comme dans [7]

$$(17.7) \quad \operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\theta(\pi(z), z)} + O(1) \ll \log \frac{1}{\delta(z, K)} + O(1)$$

car, clairement, on a pour tout z de $\overline{D}$, $\theta(\pi(z), z) \gg \delta(z, K)^2$.

Deuxième cas: $\theta(\pi(z), z) \leq \theta(E, z)^2$. On a alors, pour tout k et pour tout j , en utilisant (16.7)

$$\theta(\pi(z), z) \leq \theta(\zeta_{j,k}, z)^2 \ll \theta(\pi(z), z)^2 + |\pi(z) - \zeta_{j,k}|^4$$

donc

$$\theta(\pi(z), z) \ll \theta(\pi(z), z)^2 + |\pi(z) - \zeta_{j,k}|^2$$

et donc, d'après (17.5)

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll O(1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + |\pi(z) - \zeta_{j,k}|^2}$$

on a alors comme dans le deuxième cas de la preuve de la Proposition 9 de [7]

$$\operatorname{Re} \gamma(z) \ll O(1) + \log \frac{1}{d(\pi(z), E)} \ll O(1) + \log \frac{1}{\delta(z, K)}$$

car on a, pour tout z de $\overline{D}$, $d(\pi(z), E) \geq \delta(z, K)$.

18. THÉOREME. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞ et p un point de ∂D . Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$ et $\gamma:]-1, 1[\rightarrow Z(]-1, 1[^{2n})$ une courbe de classe C^∞ vérifiant $\gamma(0) = 0$ telle que, si on note $M = \{(x, \zeta, r); x \in]-1, 1[^{n-1}, \zeta \in \gamma(]-1, 1[), r = 0\}$, M vérifie la propriété suivante:

(18.1) l'espace tangent à M n'est pas dans le noyau de la forme de contact $dt - \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i$.

Soit K un sous-ensemble compact de M tel que, si on note E la projection $Z(K)$ de K sur $\gamma(]-b, b[)$, on ait

$$(18.2) \quad \int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E) d\varepsilon \ll r \left(\log \frac{1}{r} + O(1) \right)$$

pour tout r , $0 < r < 1$, et toute boule euclidienne B_r de rayon r centrée sur E . Alors $h^{-1}(K)$ a la propriété de division par $A^\infty(D)$.

PREUVE. Soit $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille de fonctions de $C_{h^{-1}(K)}^\infty$. On lui applique le Lemme 14 de division dans $C^\infty(\overline{D})$; il existe donc une fonction g de $C_{h^{-1}(K)}^\infty$ positive et ne s'annulant que sur $h^{-1}(K)$ et des fonctions $(h_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de $C_{h^{-1}(K)}^\infty$ telles que l'on ait, pour tout i de $\mathbf{N}$, $f_i = gh_i$. On peut supposer $\sup_{f \in \overline{D}} g(z) \leq 1/2$.

On pose $f = g \circ h^{-1}$; f est une fonction de C_K^∞ , positive et ne s'annulant que sur K . On peut donc lui appliquer le Lemme 3; il existe une fonction s de C_K^∞ vérifiant les conclusions du Lemme 3 et en particulier, pour tout (p, x) de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}^{2n}$

$$(3.5) \quad f(x) \leq C(p)s(x)^p.$$

On déduit, de là, que pour tout (p, z) de $\mathbf{N} \times \overline{D}$, on a

$$(18.3) \quad g(z) \leq C'(p)\delta(z, K)^p,$$

où $\delta(z, k)$ est définie à partir de s par (8.1).

C'est cette fonction s particulière qui sert également à définir la fonction H dont l'existence est assurée par le Lemme 5 et c'est à partir de la fonction H ainsi obtenue que l'on définit la fonction ψ holomorphe dans D , de classe C^∞ dans $\overline{D} \setminus E$ qui vérifie les conclusions de la Proposition 17 en particulier

$$(17.3) \quad \operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\delta(z, K)} + O(1) \quad \text{pour tout } z \text{ de } \overline{D} \setminus h^{-1}(K).$$

De (18.3), on déduit que si on pose $\theta = \log 1/g$, il existe une fonction $\omega(t)$ tendant vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 telle que l'on ait

$$(18.4) \quad \theta(z) \geq \omega[\delta(z \cdot K)] \log \frac{1}{\delta(z, K)} \quad \text{pour tout } z \text{ de } \overline{D} \setminus h^{-1}(K).$$

On poursuit alors cette preuve comme celle du Théorème 12 de [7] et on conclut qu'il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ plate sur $h^{-1}(K)$ et ne s'annulant que sur $h^{-1}(K)$, vérifiant $g \leq |F|$ sur $\overline{D} \setminus h^{-1}(K)$. Il existe donc, toujours d'après le Lemme 14, des fonctions k_i de $C_{h^{-1}(K)}^\infty$ telles que l'on ait, pour tout i de $\mathbf{N}$, $f_i = Fk_i$. On vérifie, ici aussi, que, pour tout i , k_i appartient à l'adhérence dans $C^\infty(\overline{D})$ de $A^\infty(D) \cdot f_i$.

19. COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du Théorème 18, $h^{-1}(K)$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

PREUVE. Il s'agit là d'une conséquence de la Proposition 12 et du Théorème 18.

20. REMARQUE. L'hypothèse 18.2 du Théorème 18 est évidemment vérifiée par un compact K dont la projection est réduite à un point.

21. COROLLAIRE. *Soit A un sous-ensemble fermé de ∂D localement inclus dans une sous-variété ∂D , de classe C^∞ , intégrale de la structure de contact sur ∂D , c'est-à-dire, tel que, pour chaque point p de A , il existe un voisinage ouvert ω de p et N une sous-variété de $\partial D \cap \omega$, intégrale de la structure de contact sur ∂D contenant $A \cap \omega$. Alors A vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

PREUVE. On peut écrire $A = \cup_{i=1}^k A_i$, où, pour chaque i , $i = 1, \dots, k$, il existe une carte de Darboux (ω_i, h_i) telle que l'on ait

$$A_i \subset h_i^{-1}\{(x, 0), x \in]-1, 1[^n\}.$$

Alors, de la Remarque 20 et du Théorème 18 on déduit que, pour tout i , $i = 1, \dots, k$, A_i a la propriété de division par $A^\infty(D)$ et on conclut à l'aide de la Proposition 13.

22. DÉFINITION. On dit qu'un sous-ensemble fermé A de ∂D est un ensemble pic pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que l'on ait $f = 1$ sur A et $|f| < 1$ sur $\overline{D} \setminus A$.

On rappelle [5] qu'un ensemble pic pour $A^\infty(D)$ vérifie les hypothèses du Corollaire 21.

23. COROLLAIRE. *Une réunion finie d'ensembles pics pour $A^\infty(D)$ a la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

Ceci généralise un résultat de J. Bruna et J. M. Ortega [2].

Dimension de Hausdorff. On note $\mathcal{H}(E)$ la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble compact E de $\mathbf{R}$.

24. LEMME. *Il existe un compact E de $[0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes*

- (a) $\mathcal{H}(E) = 1$,
- (b) *Il existe des constantes C et C' telles que, pour tout intervalle I de longueur $|I| < 1$, on ait*

$$\int_0^{|I|} N_\varepsilon(E \cap I) d\varepsilon \leq C|I| + C'|I| \log \frac{1}{|I|}.$$

PREUVE. Soit ξ un réel, $0 < \xi < \frac{1}{2}$. On considère l'ensemble de Cantor $E(\xi)$ construit sur $[0, 1]$ et de rapport de dissection ξ . On sait [10] que l'on a

$$(24.1) \quad E(\xi) = \bigcap_{n=0}^{\infty} E(n, \xi),$$

où $E(n, \xi)$ est formé de 2^n intervalles fermés disjoints $E(k, n, \xi)$ de longueur ξ^n ,

$$(24.2) \quad \mathcal{H}[E(\xi)] = -\log 2 / \log \xi.$$

On vérifie alors l'inégalité

$$(24.3) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\xi} \leq \int_0^1 N_\varepsilon(E_\xi) d\varepsilon \leq \frac{2}{1-2\xi}.$$

Soient a et b deux réels, $a > 0$, on note

$$(24.4) \quad aE(\xi) + b = \{ax + b; x \in E(\xi)\};$$

on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(24.5) \quad N_{a\varepsilon}(aE(\xi) + b) = N_\varepsilon(E(\xi)).$$

Soit I un intervalle de $[0, 1]$ de longueur $r < 1$ et n un entier positif ou nul tel que l'on ait $\xi^{n+1} \leq r < \xi^n$. On a

$$I \cap E(\xi) \subset E(k_1, n, \xi) \cup E(k_2, n, \xi)$$

pour k_1 et k_2 convenables dans $[0, 2^n - 1] \cap \mathbf{N}$.

Du procédé de construction de $E(\xi)$, on déduit

$$I \cap E(\xi) \subset \bigcup_{i=1}^4 E(k'_i, n+1, \xi), \quad k'_i \in [0, 2^{n+1} - 1] \cap \mathbf{N},$$

et donc, en utilisant la propriété d'homogénéité de $E(\xi)$ et (24.4),

$$(24.6) \quad I \cap E(\xi) \subset \bigcup_{i=1}^4 \xi^{n+1} E(\xi) + b_i$$

où les b_i , $i = 1, \dots, 4$, sont des réels convenables.

Pour tout ε , $0 < \varepsilon < r$, on a d'après (24.5) et (24.6)

$$N_\varepsilon(I \cap E(\xi)) \leq \sum_{i=1}^4 N_\varepsilon(\xi^{n+1} E(\xi) + b_i) \leq 4N_{\varepsilon/\xi^{n+1}}(E(\xi)).$$

De là, en utilisant la décroissance de la fonction $\varepsilon \rightarrow N_\varepsilon(E)$, on obtient, pour tout ξ , $0 < \xi < \frac{1}{2}$, pour tout intervalle I de longueur $r < 1$ et tout ε , $0 < \varepsilon < r$,

$$(24.7) \quad N_\varepsilon(I \cap E(\xi)) \leq 4N_{\varepsilon/r}(E(\xi)).$$

Soit maintenant $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de nombres réels positifs convergeant vers $\frac{1}{2}$ et $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0 et vérifiant $a_0 = 1$. On note $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_n E(\xi_n)$. On a, pour tout n ,

$$\mathcal{H}(E) \geq \mathcal{H}(a_n E(\xi_n)) = \mathcal{H}(E(\xi_n)) = -\log 2 / \log \xi_n$$

et donc $\mathcal{H}(E) = 1$. Ceci établit (a).

Pour prouver (b), on remarque que, pour tout intervalle I de longueur $r < 1$ et tout ε , $0 < \varepsilon < r$, on a

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(I \cap E) &\leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_\varepsilon(I \cap a_n E(\xi_n)) + \sum_{a_n > r} N_\varepsilon(I \cap a_n E(\xi_n)) \\ &\leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_\varepsilon(a_n E(\xi_n)) + \sum_{a_n > r} N_\varepsilon[a_n(I_n \cap E(\xi_n))] \end{aligned}$$

où, pour chaque n , I_n est un intervalle convenable de longueur r/a_n . On a, d'après (24.5),

$$N_\varepsilon(I \cap E) \leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_{\varepsilon/a_n}(E(\xi_n)) + \sum_{a_n > r} N_{\varepsilon/a_n}(I_n \cap E(\xi_n)).$$

D'après (24.7) appliqué aux intervalles I_n de longueur $r/a_n < 1$, on déduit

$$N_\varepsilon(I \cap E) \leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_{\varepsilon/a_n}(E(\xi_n)) + 4 \sum_{a_n > r} N_{\varepsilon/r}(E(\xi_n))$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^r N_\varepsilon(I \cap E) d\varepsilon &\leq r + \sum_{a_n \leq r} \int_0^{a_n} N_{\varepsilon/a_n}(E(\xi_n)) d\varepsilon + 4 \sum_{a_n > r} \int_0^r N_{\varepsilon/r}(E(\xi_n)) d\varepsilon \\ &\leq r + \sum_{a_n \leq r} a_n \int_0^1 N_\varepsilon(E(\xi_n)) d\varepsilon + 4 \sum_{a_n > r} r \int_0^1 N_\varepsilon(E(\xi_n)) d\varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut d'après (24.3)

$$\int_0^r N_\varepsilon(I \cap E) d\varepsilon \leq r + 2 \sum_{a_n \leq r} \frac{a_n}{1 - 2\xi_n} + 8r \sum_{a_n > r} \frac{1}{1 - 2\xi_n}.$$

Si on choisit $a_n = e^{-n^2}$ et $\xi_n = (n+1)/2(n+2)$, on vérifie qu'il existe deux constantes C et C' telles que l'on ait

$$\int_0^r N_\varepsilon(I \cap E) d\varepsilon \leq Cr + C'r \log 1/r.$$

25. THÉORÈME. Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, à frontière ∂D de classe C^∞ , il existe sur ∂D des ensembles de zéros et des ensembles d'interpolation pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff n .

PREUVE. Il s'agit là d'une conséquence des Théorèmes 10 et 18 et du Lemme 24.

REMARQUE. Les méthodes développées dans les deux premières parties de ce travail s'appliquent à $A(D)$, la classe des fonctions holomorphes dans D et continues dans $\bar{D}$. Dans ce cas en effet les sous-ensembles de zéros et d'interpolation sont les mêmes. On obtient l'analogie du Théorème 10 pour $A(D)$ en remplaçant la condition (10.1) par la condition: "pour tout ε , il existe un recouvrement fini de E par des boules euclidiennes centrées sur E dont la somme des rayons est inférieure à ε ".

Ce résultat généralise le Théorème (3.1) de [8].

REFERENCES

1. V. I. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, "Mir", Moscou, 1976.
2. J. Bruna et J. M. Ortega, *Closed finitely generated ideals in algebras of holomorphic functions and smooth to the boundary in strictly pseudoconvex domains*, Analyse Complexe (Proc., Toulouse 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1094, Springer-Verlag, New York, pp. 20–28.
3. —, Communication personnelle.
4. J. Chaumat et A. M. Chollet, *Ensembles pics pour $A^\infty(D)$* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), 171–200.
5. —, *Caractérisation et propriétés des ensembles localement pics de $A^\infty(D)$* , Duke. Math. J. **47** (1980), 763–787.
6. —, *Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudo-convexes*, Ark. Mat. **24** (1968), 27–57.
7. —, *Propriété des divisions par des fonctions de $A^\infty(D)$* , Bull. Soc. Math. France **114** (1986).
8. T. Duchamps et E. L. Stout, *Maximum modulus sets*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **31** (1981), 37–69.
9. B. S. Henriksen, *A peak set of Hausdorff dimension $2n - 1$ for the algebra $A(D)$ in the boundary of a domain D with C^∞ -boundary in $\mathbb{C}^n$* , Math. Ann. **259** (1982), 271–277.
10. J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.
11. A. Sadullaev, *A boundary uniqueness theorem in $\mathbb{C}^n$* , Math. U.S.S.R.-Sb. **30** (1976), 501–514.
12. E. L. Stout, *Interpolation manifolds*, Recent Developments in Several Complex Variables, Proc. Conf., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1979, pp. 373–391.
13. J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, New York, 1972.
14. A. E. Tumanov, *A peak set for the disk algebra of metric dimension 2.5 in the three dimensional unit sphere*, Math. U.S.S.R.-Izv. **11** (1977), 353–359.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU (CNRS 9296), ANALYSE HARMONIQUE MATHÉMATIQUE (BAT. 425), 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE