ENSEMBLES DE RIESZ

VALÉRIE TARDIVEL

ABSTRACT. Let G be an abelian countable discrete group. We show that there exists no positive characterization of Riesz subsets of G , by proving that the Riesz subsets of G form a coanalytic non-Borel subset of 2^G .

Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Nous démontrons qu'il n'existe pas de caractérisation positive des ensembles de Riesz de G , en prouvant que les ensembles de Riesz de G forment un coanalytique non borélien dans 2^G .

Si G est un groupe abélien discret dénombrable, le groupe dual $\hat{G}$ est un compact métrisable. Le spectre d'une mesure μ , élément de $M(\hat{G})$, est le support de $\hat{\mu}$ dans G discret. Il est noté $S(\mu)$. On notera m ou $d\xi$ la mesure de Haar sur $\hat{G}$. Les notions d'analyse de Fourier utilisées se trouvent dans les deux premiers chapitres du livre de Rudin [R1].

Soient E et F , deux espaces polonais. Un ensemble $A \subset E$ est un ensemble analytique, s'il existe un borélien $B \subset E \times F$, tel que A soit la projection de B sur E . Le complémentaire d'un ensemble analytique est un ensemble coanalytique. Les résultats utilisés en théorie descriptive se trouvent dans Dellacherie [D].

On note S l'ensemble des suites finies d'entiers. Pour s et s' éléments de S , on note $s < s'$ si s est une section commençante de s' . Si s et s' sont deux éléments de S , on note ss' la suite obtenue par concaténation des suites s et s' . On notera $|s|$ la longueur de s .

DEFINITION 1. On appelle *arbre* sur $\mathbb{N}$, un ensemble T de suites finies d'entiers telles que $(n_0, n_1, \dots, n_k) \in T \Rightarrow (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) \in T$. (n_k) est une branche infinie pour T si $\forall k (n_0, \dots, n_k) \in T$. Un arbre T est dit bien fondé, s'il ne contient aucune branche infinie.

Si on identifie un arbre T avec sa fonction caractéristique, l'ensemble $\mathcal{T}$ des arbres sur $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de 2^S . On voit facilement que $\mathcal{T}$ est un fermé de 2^S . Si on le munit de la topologie induite par 2^S , on obtient un compact métrisable.

On a le théorème suivant:

THEOREME 2 [D]. *L'ensemble des arbres bien fondés sur $\mathbb{N}$ est un ensemble coanalytique non borélien.*

Nous allons maintenant définir les ensembles de Riesz.

DEFINITION 3. Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Une partie $\Lambda \subset G$ est un *ensemble de Riesz*, si toute mesure définie sur $\hat{G}$, à spectre contenu dans Λ , est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

Received by the editors January 26, 1986.

1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 43A46, 04A15.

Key words and phrases. Riesz sets, coanalytic sets, harmonic analysis on compact abelian groups.

REMARQUES. (1) L'ensemble vide est un ensemble de Riesz car $S(\mu) = \emptyset$ entraîne $\mu = 0$.

(2) Toute sous-partie d'un ensemble de Riesz est encore un ensemble de Riesz.

(3) D'après le théorème de F. et M. Riesz, $\mathbf{N}$ est un ensemble de Riesz dans $\mathbf{Z}$ [R2].

On appelle τ la topologie induite sur G par le compactifié de Bohr bG de G [R1]. Le théorème suivant, est une généralisation d'un résultat dû à Meyer [M].

THEOREME 4. Soit $E \subset G$ un ensemble de Riesz. Soit $\Lambda \subset G$, possédant la propriété suivante: pour tout $x \notin E$, il existe un τ -voisinage ouvert V_x de x tel que $V_x \cap \Lambda$ soit un ensemble de Riesz. Alors Λ est un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit μ , un élément de $M(\hat{G})$, dont le spectre est contenu dans Λ . Nous allons montrer que la partie singulière μ_s , de μ , est nulle. Soit $x \notin E$ et soit V_x un τ -voisinage ouvert de x tel que $V_x \cap \Lambda$ soit un ensemble de Riesz. Il existe alors une mesure atomique σ telle que $\hat{\sigma}(x) = 1$ et $\hat{\sigma} = 0$ sur le complémentaire de V_x [M]. Alors, le spectre de $\mu * \sigma$ est contenu dans $V_x \cap \Lambda$, qui est un ensemble de Riesz. On en déduit que $(\mu * \sigma)_s = 0$. Puisque $(\mu * \sigma)_s = \mu_s * \sigma$ [M], en passant aux transformées de Fourier, on obtient $\hat{\mu}_s(x) = 0$. Donc, le spectre de μ_s est contenu dans E , qui est ensemble de Riesz. On en déduit que μ_s est nulle, et que Λ est un ensemble de Riesz.

PROPOSITION 5. Tout ensemble fini est un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit $E = \{x_0, \dots, x_k\}$ et soit μ une mesure dont le spectre est contenu dans E . La mesure ν définie par $\nu = \sum_{j=0}^k \hat{\mu}(x_j)(\xi, x_j) d\xi$ est telle que $\hat{\nu} = \hat{\mu}$. Donc $\mu = \nu$ et, par conséquent $\mu \ll m$.

DEFINITION 6. Soit (x_k) une suite d'éléments de G . (x_k) est dite dissociée si tout élément de G admet au plus une représentation de la forme

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_k x_k \quad \text{où } \varepsilon_k \in \begin{cases} \{-1, 0, 1\} & \text{si } 2x_k \neq 0, \\ \{0, 1\} & \text{si } 2x_k = 0. \end{cases}$$

THEOREME 7. Soit (x_k) une suite dissociée d'éléments de G . Soit

$$E = \left\{ \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k x_k \mid \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2x_k \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2x_k = 0 \right\}.$$

Alors E n'est pas un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit (α_k) une suite de réels compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, et ne tendant pas vers 0 à l'infini. Pour tout k élément de $\mathbf{N}$, on définit la fonction P_k par

$$P_k(\xi) = \begin{cases} (1 + \alpha_k \langle x_k, \xi \rangle + \alpha_k \overline{\langle x_k, \xi \rangle}) & \text{si } 2x_k \neq 0, \\ (1 + \alpha_k \langle x_k, \xi \rangle) & \text{si } 2x_k = 0. \end{cases}$$

Pour tout n élément de $\mathbf{N}$, on définit la mesure de probabilité μ_n par

$$\mu_n = \prod_{k=0}^n P_k(\xi) dm(\xi).$$

$\hat{\mu}_n$ vérifie alors

$$(1) \quad \begin{cases} \hat{\mu}_n(0) = 1, \\ \hat{\mu}_n(x) = \prod_{k=0}^j \alpha_k^{|\varepsilon_k|} & \text{si } x = \sum_{k=0}^j \varepsilon_k x_k, \quad j \leq n, \\ \hat{\mu}_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après (1), et puisque les mesures μ_n sont des mesures de probabilité, la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ possède une limite vague μ telle que

$$\begin{cases} \hat{\mu}(0) = 1, \\ \hat{\mu}(x) = \prod_{k=0}^j \alpha_k^{|\varepsilon_k|} & \text{si } x = \sum_{k=0}^j \varepsilon_k x_k, \\ \hat{\mu}(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

μ est une mesure de probabilité dont le support est contenu dans E . Puisque la suite (α_k) ne tend pas vers 0, μ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Haar. E n'est donc pas un ensemble de Riesz.

Notre but, maintenant, est de montrer que $R(G)$, l'ensemble des ensembles de Riesz, n'est pas borélien (Théorème 10). En utilisant les Théorèmes 4 et 7, nous allons associer à tout arbre bien fondé un ensemble de Riesz, et, à tout arbre qui n'est pas bien fondé, un ensemble qui n'est pas un ensemble de Riesz. Nous aurons à établir deux résultats préliminaires. Tout d'abord, nous introduisons sur G une nouvelle topologie.

G est un groupe abélien discret dénombrable. Le compactifié de Bohr de G , bG , est un compact, qui généralement n'est pas métrisable. Cependant, on peut trouver un compact métrisable G^* contenant G . En effet, considérons dans $\hat{G}$, un sous-groupe dénombrable séparant les points de G . Son groupe dual, G^* , est un compact métrisable contenant G . En fait, G^* peut être identifié à un quotient de bG [R1]; bG se projette donc sur G^* . Si on note τ^* , la topologie induite sur G par G^* , tout ouvert de G pour τ^* est un ouvert de G pour τ .

LEMME 8. *Soit K un compact métrisable. Soient D un ensemble dénombrable contenu dans K et F un fermé disjoint de K . Alors, il existe des ouverts U_n , deux à deux disjoints, tels que*

- (i) $\overline{U_n} \cap F = \emptyset$,
- (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset D$,
- (iii) $U_n \cap D$ est ouvert et fermé dans D .

DEMONSTRATION. Soit x un élément de D . D étant dénombrable, on peut trouver $r \in \mathbf{R}^{++}$ tel que $B(x, r) \cap D$ soit ouvert et fermé dans D , et $\overline{B}(x, r) \cap F = \emptyset$. On en déduit un recouvrement de D par des boules B_n telles que $B_n \cap D$ soit ouvert et fermé dans D , et $B_n \cap F = \emptyset$. Si l'on pose $U_n = B_n \setminus \bigcup_{k < n} \overline{B}_k$, les U_n vérifient les conditions (i), (ii), et (iii) de l'énoncé.

THEOREME 9. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Soit G^* , un compact métrisable, contenant G , et induisant sur G la topologie τ^* . Soit $(x_k)_{k \geq 0}$, une suite d'éléments non nuls de G , tendant vers 0 pour la topologie τ^* .*

Alors, pour tout $s \in S$, on peut construire:

- (i) un ensemble

$$E_s = \left\{ \sum_{k=0}^{|s|-1} \varepsilon_k t_k^{(s)} \mid \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2t_k^{(s)} \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2t_k^{(s)} = 0, t_k^{(s)} \in (x_k) \right\}$$

tel que $s < s' \Rightarrow E_s \subset E_{s'}$;

(ii) une partition $(W_j^{(s)})_{j \in \mathbf{N}}$ en ouverts fermés, pour la topologie induite par G^* , de $G \setminus E_s$;

(iii) si $s = \widehat{rk}$, un ouvert U_s de $G \setminus E_r$, pour la topologie induite par G^* , réunion d'éléments de $(W_j^{(r)})$ et vérifiant:

$$\begin{aligned} U_{rk} \cap U_{rn} &= \emptyset & \text{si } k \neq n, \\ E_t \setminus E_r &\subset U_{rk} & \text{si } rk < t. \end{aligned}$$

DEMONSTRATION. On note $(p_k)_{k \geq 0}$ la suite des nombres premiers. A toute suite finie $s = (n_0, \dots, n_k)$, on associe l'entier naturel $\nu(s) = p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k+1}$. On vérifie aisément, que ν est une bijection de S sur $\mathbf{N}$, vérifiant $s < s' \Rightarrow \nu(s) \leq \nu(s')$. Nous allons construire, par récurrence, pour tout $k = \nu(u)$ un ensemble E_u , et des parties finies A_{sn}^k de $\mathbf{N}$ tels que

- (α) si $k' > k$, $A_{sn}^{k'} \supset A_{sn}^k$,
- (β) si $m \neq n$, $A_{sm}^k \cap A_{sn}^k = \emptyset$,
- (γ) si $t > \widehat{sn}$ et $\nu(t) \leq k$, $E_t \setminus E_s \subset \bigcup_{j \in A_{sn}^k} W_j^{(s)}$,
- (δ) si $\nu(\widehat{sn}) > k$, $A_{sn}^k = \emptyset$.

On pose $E_\emptyset = \{0\}$. Grâce au Lemme 8, on construit $(W_j^\emptyset)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifiant (ii). A cette étape de la construction, il n'y a que la condition (δ) qui est vérifiée. Supposons la construction effectuée pour tout $k < n = \nu(s)$, et effectuons la construction pour s . On a donc construit:

- des ensembles E_u , pour $\nu(u) < \nu(s)$, vérifiant (i),
- des partitions $(W_j^{(u)})_{j \in \mathbf{N}}$, pour $\nu(u) < \nu(s)$, vérifiant (ii),
- des parties finies de $\mathbf{N}$, A_{up}^k , vérifiant (α), (β), (γ), et (δ).

On a $s = \widehat{rm}$, par exemple. Il faut trouver $t_{|r|}^{(s)}$, élément de $G \setminus E_r$ et extrait de la suite $(x_k)_{k \geq 0}$, pour construire

$$E_s = E_r \cup \{E_r + t_{|r|}^{(s)}\} \cup \{E_r - t_{|r|}^{(s)}\} \quad \text{si } 2t_{|r|}^{(s)} \neq 0$$

ou

$$E_s = E_r \cup \{E_r + t_{|r|}^{(s)}\} \quad \text{si } 2t_{|r|}^{(s)} = 0$$

et il faut construire les A_{up}^n vérifiant (α), (β), (γ), et (δ).

Pour simplifier les notations, posons $t_{|r|}^{(s)} = t$. Soit x élément de E_r , $x \neq 0$. Il existe une suite u , de longueur maximale, pour laquelle on a: $x \in E_r \setminus E_u \subset \bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$ si $\widehat{up} < r(*)$. Nous allons trouver t et A_{up}^n tels que

- (a) pour tout x vérifiant (*)

$$\begin{aligned} x + t &\in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)} & \text{si } \widehat{up} < r, \\ x - t &\in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)} & \text{si } \widehat{up} < r, \end{aligned}$$

la deuxième condition pouvant être nulle

(b)

$$t \in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)}, \quad -t \in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)},$$

la deuxième condition pouvant être nulle.

D'après la condition (δ) , il suffit de construire les A_{up}^n vérifiant (α) , (β) et (γ) pour $\nu(\widehat{up}) \leq n$.

La suite (x_k) tend vers 0, donc, pour tout x vérifiant $(*)$, la suite $x + t$, où $t \in (x_k)$, tend vers x (il en est de même pour la suite $x - t$). Si $x \in \bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$, pour t suffisamment grand, puisque $\bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$ est ouvert, en peut avoir $(x + t)$, (respectivement $x - t$) élément de $\bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels x , on peut trouver t tel que (a) soit vérifié, dès que $A_{up}^n \supset A_{up}^{n-1}$.

Pour que la condition (b) soit vérifiée, il faut que l'on puisse trouver t dans la suite (x_k) tel que pour tout $\widehat{up} < s$, t soit dans un $W_{j(\widehat{up})}^{(u)}$ et $-t$ soit dans un $W_{j'(\widehat{up})}^{(u)}$ qui n'aient pas déjà été choisis. Il suffit alors de poser $A_{up}^n = A_{up}^{n-1} \cup \{j(\widehat{up}), j'(\widehat{up})\}$ pour avoir le résultat, puisque les $W_j^{(u)}$ forment des partitions de $G \setminus E_u$.

Pour chaque u , telle que $\nu(u) < \nu(s)$, il n'y a qu'un nombre fini de $W_j^{(u)}$ qui ont été choisis. Supposons, qu'à partir d'un certain rang, tous les éléments de la suite (x_k) soient dans la réunion de ces $W_j^{(u)}$ ($\nu(u) < \nu(s)$). Alors, il existe un $W_j^{(u)}$ contenant un nombre infini d'éléments de la suite (x_k) . Donc, il existe une suite extraite qui se trouve dans l'un des $W_j^{(u)}$. Cette suite extraite converge vers 0, et, $W_j^{(u)}$ étant fermé, doit contenir cette limite. Or, ceci est impossible par construction de $W_j^{(u)}$. Il y a donc une infinité d'éléments de (x_k) en dehors des $W_j^{(u)}$ déjà choisis. S'il y a une infinité d'éléments de la suite (x_k) qui ne sont pas d'ordre 2, un raisonnement analogue au précédent montre qu'il y a une infinité d'éléments t de la suite tels que t et $-t$ soient en dehors des $W_j^{(u)}$ déjà choisis. On choisit donc t , $j(\widehat{up})$ et $j'(\widehat{up})$, pour $\widehat{up} < s$ tels que la condition (b) soit satisfaite. On achève ainsi la construction de E_s , et des A_{up}^n vérifiant (α) , (β) , (γ) , et (δ) au rang n . E_s vérifie (i). Ensuite, le Lemme 8 permet de construire la partition $(W_j^{(s)})_{j \in \mathbb{N}}$ vérifiant (ii). Il suffit alors de poser $U_{sn} = \bigcup \{W_j^{(s)} | j \in \bigcup_k A_{sn}^k\}$ pour que (iii) soit vérifiée.

Ceci achève la démonstration du théorème.

THEOREME 10. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. $R(G)$ n'est pas borélien.*

DEMONSTRATION. Soit (t_k) une suite d'éléments non nuls de G tendant vers 0 pour τ^* . On peut, par induction, à partir de la suite (t_k) , construire une suite dissociée (x_k) tendant vers 0 pour τ^* [G-McG, Lemma 7.1.1] A partir de cette suite (x_k) , on effectue la construction donnée par le Théorème 9.

Soit T un arbre sur $\mathbf{N}$. Posons $F(T) = \bigcup_{s \in T} E_s$.

(a) Nous allons montrer: $F(T)$ est un ensemble de Riesz si, et seulement si, T est bien fondé.

(1) Si T admet une branche infinie, $F(T)$ contient un ensemble de la forme $\{\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k x'_k \mid \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2x'_k \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2x'_k = 0\}$ où la suite (x'_k) est une suite dissociée, extraite de la suite (x_k) . D'après le Théorème 7, $F(T)$ n'est pas un ensemble de Riesz.

(2) Supposons que $F(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Pour $s \in S$, on pose $F_s(T) = \bigcup_{u > s} E_u$.

D'après la construction effectuée au théorème précédent, on a

$$F_s(T) \subset E_s \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_{\widehat{sn}} \right).$$

Nous allons montrer que T contient une branche infinie. On a

$$F(T) = \bigcup_n F_{\langle n \rangle}(T).$$

Montrons qu'il existe $\langle n_0 \rangle \in T$, telle que $F_{\langle n_0 \rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Supposons que ceci soit faux. Soit $x \in G \setminus E_\emptyset$. x est dans l'un des $W_j^{(\emptyset)}$, soit $W_{j(x)}^{(\emptyset)}$. D'après la construction effectuée au Théorème 9, $W_{j(x)}^{(\emptyset)} \cap F(T) = \emptyset$ ou, il existe $\langle n \rangle$ tel que $j(x) \in \bigcup_k A_n^k$ et $W_{j(x)}^{(\emptyset)} \cap F(T) \subset F_{\langle n \rangle}(T)$. On en déduit que $W_{j(x)}^{(\emptyset)} \cap F(T)$ est un ensemble de Riesz. Puisque les $W_{j(x)}^{(\emptyset)}$ sont des ouverts de G pour τ et $E_\emptyset$ est un ensemble de Riesz, d'après le Théorème 4, $F(T)$ est un ensemble de Riesz. Il existe donc bien n_0 telle que $F_{\langle n_0 \rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. De plus, $\langle n_0 \rangle \in T$ car sinon $F_{\langle n_0 \rangle}(T)$ serait l'ensemble vide, donc un ensemble de Riesz.

Supposons qu'il existe $s \in T$ telle que $F_s(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz, et montrons que l'on peut trouver $n \in \mathbf{N}$, tel que $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz et tel que $\langle \widehat{sn} \rangle \in T$. On a $F_s(T) = \bigcup_n F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$. Supposons, que, pour tout n , $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$ soit un ensemble de Riesz. Soit $x \in G \setminus E_s$. x est donc dans l'un des $W_j^{(s)}$, soit $W_{j(x)}^{(s)}$. Comme précédemment, en utilisant le Théorème 9, on montre que $W_{j(x)}^{(s)} \cap F_s(T)$ est un ensemble de Riesz. Les $W_{j(x)}^{(s)}$ étant des ouverts de G pour la topologie τ et E_s étant un ensemble de Riesz, une nouvelle utilisation du Théorème 4 montre que $F_s(T)$ est un ensemble de Riesz. Donc, il existe bien n tel que $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Puisque $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$ ne peut pas être vide, $\langle \widehat{sn} \rangle \in T$.

Donc, pour toute suite finie $s \in T$ telle que $F_s(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\langle \widehat{sn} \rangle \in (T)$, et $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$ ne soit pas un ensemble de Riesz.

On en déduit l'existence d'une suite infinie d'entiers σ , telle que, pour toute section commençante s de σ , $F_s(T)$ soit non vide et ne soit pas un ensemble de Riesz et $s \in T$. σ est donc une branche infinie pour T .

Ceci achève la partie (a) de la démonstration.

(b) On montre facilement que l'application F de $\mathcal{T}$ dans 2^G définie par $F(T) = \bigcup_{s \in T} E_s$, est de première classe.

Si $R(G)$ était borélien, son image réciproque par F serait un borélien de $\mathcal{T}$. Or, cette image réciproque est l'ensemble des arbres bien fondés sur $\mathbb{N}$ qui, d'après le Théorème 2, n'est pas borélien. Donc $R(G)$ n'est pas borélien.

THEOREME 11. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. $R(G)$ est un ensemble coanalytique dans 2^G .*

DEMONSTRATION. 2^G est un espace polonais. $M^1(\hat{G})$, muni de la topologie vague, est également un espace polonais.

Or, $\Lambda \subset G$ est un ensemble de Riesz, si et seulement si,

$$\forall \mu \in M^1(\hat{G}) \quad (\forall x \in G \ (x \notin \Lambda \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0)) \Rightarrow \mu \ll m$$

or, μ est absolument continue par rapport à m si, et seulement si, $|\mu|$ est absolument continue par rapport à m , c'est-à-dire si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall B \text{ borélien} \quad m(B) < \eta \Rightarrow |\mu|(B) < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall k > 0 \quad \exists p > 0 \quad \forall B \text{ borélien} \quad m(B) < \frac{1}{p} \Rightarrow |\mu|(B) < \frac{1}{k}.$$

De plus, il suffit de faire la vérification sur les réunions finies d'ouverts de base. Ces réunions sont dénombrables car $\hat{G}$, étant un compact métrisable, admet une base dénombrable.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble de ces réunions finies d'ouverts de base. $\Lambda \subset G$ est un ensemble de Riesz si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \forall \mu \in M^1(\hat{G}) \quad (\forall x \in G \ (x \notin \Lambda \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0)) \\ \Rightarrow \left(\forall k > 0 \ \exists p > 0 \ \forall n \ m(U_n) < \frac{1}{p} \Rightarrow |\mu|(U_n) < \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Considérons le borélien suivant de $M^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \bigcup_{x \in G} \bigcap_{k > 0} \bigcup_{p > 0} \bigcap_{n \geq 0} \left(\{ \mu | \hat{\mu}(\gamma) \neq 0 \} \times \{ \Lambda | x \notin \Lambda \} \times 2^G \cup M^1(\hat{G}) \times 2^G \right. \\ \left. \times \left\{ U_n | m(U_n) \geq \frac{1}{p} \right\} \cup \left\{ \mu | |\mu|(U_n) < \frac{1}{k} \right\} \times 2^G \times 2^G \right). \end{aligned}$$

Le complémentaire de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^c$, est un borélien de $M^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$. La projection de $\mathcal{B}^c$ sur le deuxième facteur de $M^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$ est un ensemble analytique de 2^G , soit $\mathcal{A}$. Or, $R(G) = \mathcal{A}^c$, donc $R(G)$ est coanalytique dans 2^G .

COROLLAIRE 12. *Si G est un groupe abélien discret dénombrable, $R(G)$ est un ensemble coanalytique non borélien dans 2^G .*

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Jean Saint Raymond pour le temps qu'il a bien voulu m'accorder, et tout l'intérêt qu'il a porté à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier également Monsieur le Professeur Gilles Godefroy pour les indications qu'il m'a données sur les ensembles de Riesz.

BIBLIOGRAPHIE

- [D] C. Dellacherie, *Ensembles analytiques: théorèmes de séparation et applications*, Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in Math., vol. 465, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975, pp. 336–372.
- [G-McG] C. G. Graham and O. C. McGehee, *Essays in commutative harmonic analysis*, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1979.
- [M] Y. Meyer, *Spectres des mesures et mesures absolument continues*, Studia Math. **30** (1968), 87–99.
- [R1] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts, no. 12, Wiley, New York, 1962.
- [R2] ———, *Real and complex analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS 6, 4, PLACE JUSSIEU T/46/0 - 4ÈME ÉTAGE,
75256 PARIS CEDEX 05, FRANCE