STRUCTURE LOCALE DE L'ESPACE DES RÉTRACTIONS D'UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. Let Σ be a compact connected 2-manifold, and $\mathcal{R}(\Sigma)$ the space of retractions of Σ . We prove that $\mathcal{R}(\Sigma)$ is an l^2 -manifold if the boundary of Σ is not empty, and is the union of an l^2 -manifold and an isolated point id_Σ if Σ is closed.

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit X un espace métrique compact. Une rétraction de X est une fonction continue r de X dans X telle que $r \circ r = r$. L'espace $\mathcal{R}(X)$ des retractions de X fut introduit par K. Borsuk [2] qui montra que, même quand X est un rétracte absolu, $\mathcal{R}(X)$ peut ne pas être localement connexe. Peu de choses sont connues sur la structure locale de $\mathcal{R}(X)$ quand X est une variété topologique. Dans [5], T. A. Chapman prouva que, si X est une Q -variété compacte, alors $\mathcal{R}(X)$ est un rétracte absolu de voisinage; ce résultat fut complété par K. Sakai [13] qui montra que, dans ce cas, $\mathcal{R}(X)$ est une l^2 -variété. Boxer [3] montra que, si X est une surface, $\mathcal{R}(X)$ est localement connexe. Si I est un arc, $\mathcal{R}(I)$ est homéomorphe à l^2 ; ce résultat fut prouvé par Basmanov et Savchenko [1] qui demandèrent s'il pouvait s'étendre à l'espace des retractions d'une n -boule. Le théorème suivant, que nous allons démontrer dans cet article, élucide complètement la structure locale de $\mathcal{R}(\Sigma)$ quand Σ est une surface compacte.

Théorème. *Soit Σ une surface compacte connexe. Alors*

- (i) *Si le bord de Σ n'est pas vide, $\mathcal{R}(\Sigma)$ est une l^2 -variété.*
- (ii) *Si le bord de Σ est vide, $\mathcal{R}(\Sigma)$ est la réunion d'une l^2 -variété et d'un point isolé id .*

Il est possible d'identifier Σ à un sous-espace de $\mathcal{R}(\Sigma)$ en associant à chaque point de Σ la rétraction de Σ sur ce point. Il fut démontré indépendamment par Wagner [18] et l'auteur [4] que la composante connexe $\mathcal{L}(\Sigma)$ de $\mathcal{R}(\Sigma)$ qui contient Σ a le type d'homotopie de Σ . Puisque les l^2 -variétés sont déterminées topologiquement par leur type d'homotopie [9], il résulte du théorème précédent que $\mathcal{L}(\Sigma)$ est homéomorphe à $\Sigma \times l^2$.

Received by the editors July 1, 1988 and, in revised form, January 18, 1989.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 54C15, 54C55, 57N05, 57N20.

©1991 American Mathematical Society
0002-9947/91 \$1.00 + \$.25 per page

Etant donnés des espaces topologiques X et Y , nous notons $\mathcal{C}(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y avec la topologie compacte-ouverte; si $X = Y$, nous écrivons simplement $\mathcal{C}(X)$ au lieu de $\mathcal{C}(X, X)$. Si X, Y, Z sont trois espaces métrisables, on obtient une bijection de $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ sur $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ en associant à la fonction h de $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ la fonction $\bar{h}$ de $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ définie par $\bar{h}(x)(y) = h(x, y)$ (voir [6, p. 261]). Si h est une fonction de $X \times Y$ dans Z et x (resp. y) un point de X (resp. Y), nous notons h_x (resp. h_y) la fonction de Y (resp. X) dans Z définie par $h_x(y) = h(x, y)$ (resp. $h_y(x) = h(x, y)$). Si k est une fonction de X dans $\mathcal{C}(Y, Z)$, nous notons indifféremment $k(x)$ ou k_x l'image de x par k dans $\mathcal{C}(Y, Z)$. Il est connu que si X et Y sont métrisables et X compact, une suite $\{f_n\}$ converge vers f dans $\mathcal{C}(X, Y)$ si, et seulement si, pour tout point x de X et toute suite $\{x_n\}$ de points de X convergeant vers x , la suite $\{f_n(x_n)\}$ converge vers $f(x)$. Si X est un espace métrique compact, l'ensemble $\mathcal{R}(X)$ des rétractions de X est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$; il est donc séparable et topologiquement complet.

Si Σ est une surface compacte, nous notons $\partial\Sigma$ son bord et $\overset{\circ}{\Sigma}$ son intérieur. Nous notons $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$ l'ensemble des rétractions r de $\mathcal{R}(\Sigma)$ telles que $r(\Sigma) \cap \partial\Sigma = \emptyset$; c'est évidemment un ouvert de $\mathcal{R}(\Sigma)$, et $\mathcal{R}^\circ(\Sigma) = \mathcal{R}(\Sigma)$ si $\partial\Sigma$ est vide. Nous notons $\mathcal{D}(\Sigma)$ l'ensemble des rétractions r qui sont des équivalences homotopiques de Σ dans Σ (ou, ce qui revient au même, telles que $r(\Sigma)$ soit un rétracte par déformation de Σ); c'est un ouvert de $\mathcal{R}(\Sigma)$ (car, Σ étant un rétracte absolu de voisinage, deux éléments suffisamment proches de $\mathcal{C}(\Sigma)$ sont homotopes). Posons enfin $\mathcal{D}^\circ(\Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma) \cap \mathcal{R}^\circ(\Sigma)$. L'image d'une rétraction r de $\mathcal{R}(\Sigma)$ sera notée tantôt $r(\Sigma)$, tantôt $\text{im}(r)$.

Si A est un sous-ensemble d'un espace topologique, sa fermeture sera notée $\bar{A}$, sa frontière $\text{Fr}(A)$, et son intérieur $\overset{\circ}{A}$ ou $\text{Int}(A)$. La restriction à A d'une fonction f sera notée $f|_A$. La fonction identité sur A sera notée tantôt id , tantôt 1_A . Si d est une distance sur X et A, B des sous-ensembles de X , nous noterons resp. $\delta(A)$ et $d(A, B)$ le diamètre de A et la distance entre les sous-ensembles A et B ; si A est réduit à un point x , nous écrirons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$.

L'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$ sera noté I .

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Puisque Σ est un rétracte absolu de voisinage, tout élément de $\mathcal{C}(\Sigma)$ suffisamment proche de 1_Σ est homotope à 1_Σ . Si le bord de Σ est vide, le groupe d'homologie de Čech à coefficients $\mathbf{Z}_2$, $\check{H}_2(\Sigma, \mathbf{Z}_2)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_2$ tandis que $\check{H}_2(A, \mathbf{Z}_2) = 0$ pour tout sous-ensemble fermé propre de Σ , ce qui entraîne qu'aucune rétraction autre que 1_Σ ne peut induire l'identité sur $\check{H}_2(\Sigma, \mathbf{Z}_2)$, donc, a fortiori, être homotope à 1_Σ . Il en résulte que 1_Σ est un point isolé de $\mathcal{R}(\Sigma)$ quand $\partial\Sigma$ est vide.

Lemme 1. *Soit Σ une surface compacte. Il existe une déformation $\varphi: \mathcal{R}(\Sigma) \times I \rightarrow \mathcal{R}(\Sigma)$ vérifiant*

- (i) $\varphi_0 = \text{id}$,
- (ii) *pour $t > 0$, la fermeture de $\varphi_t(\mathcal{R}(\Sigma))$ est contenue dans $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$.*

Ce lemme est essentiellement la remarque (1.2) de [16]. La condition (ii) résulte de ce que, pour un collier $\partial\Sigma \times [0, 2]$ du bord de Σ , $\varphi_t(\mathcal{R}(\Sigma))$ est formé de rétractions dont les images sont contenues dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma \times [0, t[$.

Une conséquence importante du Lemme 1 est que la théorème sera démontré si nous prouvons que $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$ (ou $\mathcal{R}^\circ(\Sigma) \setminus \{1_\Sigma\}$ si $\partial\Sigma$ est vide) est une l^2 -variété. En effet, il résulte facilement de ce lemme et de [10, Théorème 6.3, pp. 139–140] que $\mathcal{R}(\Sigma)$ est un rétracte absolu de voisinage si $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$ en est un; l'affirmation découle alors d'un théorème de Toruńczyk [15, Théorème B.1].

Lemme 2. *Soient X un rétracte absolu de voisinage compact, Y un espace métrique, A un fermé de Y et $f: A \rightarrow \mathcal{R}(X)$ une fonction continue. Supposons qu'il existe un voisinage V de A dans Y et une fonction continue $\varphi: V \rightarrow \mathcal{R}(X)$ vérifiant*

$$\text{im}(\varphi_y) = \text{im}(f_y) \quad \text{pour tout } y \text{ dans } A.$$

Alors, il existe un voisinage W de A dans Y et une fonction continue $g: W \rightarrow \mathcal{R}(X)$ qui prolonge f .

Démonstration. Définissons le sous-ensemble C de $V \times X$ par

$$C = \bigcup_{y \in V} \{y\} \times \varphi_y(X).$$

C est fermé dans $V \times X$ car, si (y_n, x_n) est une suite de points de C convergeant vers (y, x) , il existe des z_n dans X tels que $x_n = \varphi_{y_n}(z_n)$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que z_n tend vers z ; alors (y_n, z_n) tend vers (y, z) donc, par continuité, $x_n = \varphi_{y_n}(z_n)$ tend vers $\varphi_y(z)$, d'où $x = \varphi_y(z)$.

Définissons $h: C \cup (A \times X) \rightarrow X$ par

$$h(y, x) = \begin{cases} x & \text{si } (y, x) \in C, \\ f_y(x) & \text{si } (y, x) \in A \times X. \end{cases}$$

Cette définition a un sens car, si (y, x) appartient à $C \cap (A \times X)$, alors y appartient à A et x à $\varphi_y(X) = f_y(X)$, donc $f_y(x) = x$. Puisque C et $A \times X$ sont fermés dans $V \times X$, h est continue. Puisque X est un rétracte absolu de voisinage, il y a un ouvert O de $V \times X$ contenant $C \cup (A \times X)$ et une fonction continue k de O dans X prolongeant h . La compacité de X permet de trouver un voisinage W de A dans Y tel que $W \times X$ soit contenu dans O . Soit $l = k|_{W \times X}$. Définissons alors $g: W \rightarrow \mathcal{C}(X)$ par $g_y = \varphi_y \circ l_y$.

Pour tout y dans W , $l_y(X)$ contient $l(\{y\} \times \varphi_y(X)) = h(\{y\} \times \varphi_y(X)) = \varphi_y(X)$. Puisque φ_y est une rétraction sur $\varphi_y(X)$, nous avons donc $\varphi_y \circ l_y(X) = \varphi_y(X)$. De plus, si x appartient à $\varphi_y(X)$, $g_y(x) = \varphi_y(l(y, x)) = \varphi_y(h(y, x)) = \varphi_y(x) = x$, ce qui montre que g_y est une rétraction de X sur

$\varphi_y(X)$. La fonction g est donc à valeurs dans $\mathcal{R}(X)$. Pour y dans A , nous avons

$$g_y(x) = \varphi_y(l(y, x)) = \varphi_y(h(y, x)) = \varphi_y(f_y(x)) = f_y(x),$$

puisque $f_y(x)$ appartient à l'image $\text{im}(\varphi_y) = \text{im}(f_y)$ de la rétraction φ_y . Ceci montre que $g: W \rightarrow \mathcal{R}(X)$ prolonge f .

Lemme 3. *Soient N une surface compacte connexe à bord non vide, X un espace métrique, A un fermé de X et $f: A \rightarrow \mathcal{D}^\circ(N)$ une fonction continue. Alors, il existe un voisinage V de A dans X et une fonction continue $\varphi: V \rightarrow \mathcal{D}^\circ(N)$ telle que $\text{im}(\varphi_x) = \text{im}(f_x)$ pour tout x dans A .*

Ce lemme sera prouvé plus loin.

Soit N une sous-variété à bord non vide de Σ qui en est un rétracte. Soit $Q(N)$, ou simplement Q , le sous-ensemble de $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$ formé des rétractions ρ telles que $\rho(\Sigma) \subset \overset{\circ}{N}$ et que la restriction de ρ à N appartiennent à $\mathcal{D}^\circ(N)$. Il est facile de voir que Q est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$, et il résulte immédiatement du Lemme 5.3 de [18] que tout élément de $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$, autre que 1_Σ quand Σ est fermée, a dans $\mathcal{R}^\circ(\Sigma)$ un voisinage de la forme $Q(N)$. Il suffit donc pour achever la démonstration du théorème, de montrer que Q est une l^2 -variété.

Lemme 4. *Q est un rétracte absolu de voisinage.*

Démonstration. Soient X un espace métrique, A un fermé de X et $f: A \rightarrow Q$ une fonction continue. Définissons $g: A \rightarrow \mathcal{D}^\circ(N)$ par $g_x = f_x|N$. D'après les Lemmes 2 et 3, il y a un voisinage V de A dans X et une fonction $G: V \rightarrow \mathcal{R}(N)$ prolongeant g . Puisque $\mathcal{D}^\circ(N)$ est ouvert dans $\mathcal{R}(N)$, nous pouvons supposer, quitte à restreindre V , que G prend ses valeurs dans $\mathcal{D}^\circ(N)$. Définissons alors une fonction h de $(V \times N) \cup (A \times \Sigma)$ dans $\overset{\circ}{N}$ par

$$h(x, m) = \begin{cases} G_x(m) & \text{si } (x, m) \in V \times N, \\ f_x(m) & \text{si } (x, m) \in A \times \Sigma. \end{cases}$$

Cette définition a un sens puisque, si (x, m) appartient à $A \times N$, alors $G_x(m) = g_x(m) = f_x(m)$. Puisque $(V \times N) \cup (A \times \Sigma)$ est fermé dans $V \times \Sigma$ et que $\overset{\circ}{N}$ est un rétracte absolu de voisinage, h a un prolongement H à un voisinage P de $(V \times N) \cup (A \times \Sigma)$ dans $V \times \Sigma$. Puisque Σ est compacte, nous pouvons trouver un voisinage W de A tel que P contienne $W \times \Sigma$. Nous obtenons alors une fonction continue k de W dans $\mathcal{C}(\Sigma, N)$ en posant $k_x = H_x$ pour x dans W . Définissons enfin $F: W \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma)$ par

$$F_x = j \circ G_x \circ k_x,$$

où j est l'inclusion de N dans Σ .

Si x appartient à A et m à Σ , $F_x(m) = (j \circ G_x)(k_x(m)) = (j \circ g_x)(f_x(m)) = f_x(m)$ puisque $j \circ g_x|_{\text{im}(f_x)} = f_x|_{\text{im}(f_x)} = \text{id}$, donc F prolonge f . Soit

x un point de W ; par définition de F , $\text{im}(F_x)$ est contenue dans $\text{im}(G_x)$; de plus, si m appartient à $\text{im}(G_x)$, $k_x(m) = H_x(m) = G_x(m) = m$, d'où $F_x(m) = m$. Ceci montre que F_x est une rétraction de Σ sur $\text{im}(G_x) \subset \overset{\circ}{N}$. De plus, $F_x|N = G_x$ appartient à $\mathcal{D}^\circ(N)$, donc F_x appartient à Q . F est donc une fonction de W dans Q prolongeant f , d'où le résultat.

Lemme 5. $Q(N)$ est une l^2 -variété.

Le cas où N est un disque présente une difficulté particulière et sera traité plus loin.

Démonstration du Lemme 5 quand N n'est pas un disque. Nous dirons qu'un espace X est divisible par l^2 s'il existe un espace Y tel que $Y \times l^2$ soit homéomorphe à X . Il est connu qu'un rétracte absolu de voisinage séparable, topologiquement complet et divisible par l^2 est une l^2 -variété (ceci résulte de la Proposition 4.5 de [14] et du fait que l^2 est homéomorphe à $l^2 \times l^2$). Puisque Q est un ouvert de l'espace séparable et topologiquement complet $\mathcal{R}(\Sigma)$, il est séparable et topologiquement complet. D'après le Lemme 4, c'est un rétracte absolu de voisinage. Il suffit donc de prouver que tout point de Q a un voisinage ouvert divisible par l^2 .

Nous utiliserons des résultats de Geoghegan [8]. Soit $M_0(I)$ l'espace des surjections croissantes de I sur lui-même. Soient A , T deux espaces métriques et U un ouvert non vide relativement compact de A tel que, notant $C(\text{Fr}(U))$ le cône sur $\text{Fr}(U)$, les paires $(\overline{U}, \text{Fr}(U))$ et $(C(\text{Fr}(U)), \text{Fr}(U))$ soient homéomorphes. Soit E un sous-ensemble de $\mathcal{E}(A, T)$ vérifiant

- (i) Pour tout f dans E , $f|_{\overline{U}}$ n'est pas constante.
- (ii) Si f appartient à E et si $h \in \mathcal{E}(A, T)$ vérifie $h|_{A \setminus U} = f|_{A \setminus U}$ et $h(\overline{U}) = f(\overline{U})$, alors h appartient à E .

Alors, E est divisible par $M_0(I)$ ([8, Théorème 2.5]; l'énoncé de ce théorème n'est pas aussi général, mais sa démonstration prouve ce résultat). De plus, $M_0(I)$ est homéomorphe à l^2 [8, Théorème 3.4], donc E est divisible par l^2 .

Soit r un élément de Q . La restriction de r à $\Sigma \setminus \text{im}(r)$ ne peut être localement constante car sinon, si K est une composante de $\Sigma \setminus \text{im}(r)$, $r(K)$ serait réduit à un point, donc aussi $r(\overline{K})$ et, à fortiori, $r(\text{Fr}(K))$. Mais $\text{Fr}(K)$ est contenue dans $\text{im}(r)$, et r est l'identité sur $\text{Fr}(K)$, donc $\text{Fr}(K)$ serait réduite à un point x . Puisque un point ne peut disconnecter une surface, $\overline{K}$ serait égal à Σ , et r serait la rétraction constante sur x . Mais ceci est impossible puisque, pour r dans Q , $\text{im}(r)$ a le type d'homotopie de N et que N n'est pas un disque. Nous pouvons donc trouver un point a de $\Sigma \setminus \text{im}(r)$ tel que, pour tout voisinage W de a , $r|_W$ ne soit pas constante. Soit U un voisinage de a homéomorphe à un disque ouvert et dont la fermeture est disjointe de $\text{im}(r)$. Soit E l'ensemble des rétractions $\rho \in Q$ vérifiant

- (1) $\overline{U} \cap \text{im}(\rho) = \emptyset$,
- (2) $\rho(U)$ contient plus d'un point.

Il est clair que E est ouvert dans Q et, d'après le choix de a et U , il contient r . La condition (i) ci-dessus n'est autre que (2). Soit ρ dans E et soit ρ' dans $\mathcal{C}(\Sigma)$ telle que $\rho'|\Sigma \setminus U = \rho|\Sigma \setminus U$ et $\rho'(\overline{U}) = \rho(\overline{U})$. Alors $\rho'(\Sigma) = \rho(\Sigma)$, donc ρ' vérifie (1) et $\rho'|\rho(\Sigma) = \rho|\rho(\Sigma) = \text{id}$, donc ρ' est une rétraction de Σ sur $\text{im}(\rho)$. Puisque $\text{im}(\rho) \subset \overset{\circ}{N}$ est un rétracte par déformation de N , ρ' appartient à Q . Puisque $\rho'(\overline{U}) = \rho(\overline{U})$ et que ρ vérifie (2), $\rho'(U)$ ne peut être réduit à un point, donc ρ' vérifie (2). Par conséquent, ρ' appartient à E , et E vérifie la condition (ii); il est donc divisible par l^2 d'après les résultats de Geoghegan, d'où le lemme.

Ceci achève de prouver le théorème, sous réserve de vérification du Lemme 3 et du cas particulier du Lemme 5 où N est un disque.

3. DÉMONSTRATION DU LEMME 3 QUAND N N'EST PAS UN DISQUE

Dans cette section, N est une surface compacte connexe à bord non vide qui n'est pas un disque; soient $C_1, \dots, C_m$ les composantes de ∂N . Soit $M = N \cup (\bigcup_{i=1}^m D_i)$ la surface fermée obtenue en ajoutant à N des disques fermés deux à deux disjoints D_i de façon que $D_i \cap N = \partial D_i = C_i$.

Lemme 6. *Si r est un élément de $\mathcal{D}^\circ(N)$, $M \setminus \text{im}(r)$ a m composantes; chacune d'elles contient exactement l'un des D_i et est simplement connexe.*

Ceci est la deuxième partie du Théorème (3.4) de [18].

Notons B le disque unité du plan complexe $\mathbf{C}$. Pour $0 \leq t \leq 1$, notons B_t le disque de centre 0 et de rayon t dans $\mathbf{C}$ et $R_t = B \setminus \overset{\circ}{B}_t$. Pour $0 < t \leq 1$, soit s_t la rétraction radiale de $B \setminus \{0\}$ sur R_t ; s_t dépend continuellement de t . A l'occasion, nous écrirons aussi s au lieu de s_1 .

Lemme 7. *Soient X un espace métrique, A un fermé de X et $f: A \rightarrow \mathcal{D}^0(N)$ une fonction continue. Alors, il existe un voisinage V de A dans X et des fonctions continues $\psi^i: V \rightarrow \mathcal{C}(B, M)$, $1 \leq i \leq m$, vérifiant*

- (i) *pour tout x dans V et $1 \leq i \leq m$, la restriction de ψ_x^i à $\overset{\circ}{B}$ est un homéomorphisme de $\overset{\circ}{B}$ sur $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$,*
- (ii) *pour tout x dans V , $\psi_x^i(\overset{\circ}{B}) \cap \psi_x^j(\overset{\circ}{B}) = \emptyset$ si $i \neq j$,*
- (iii) *pour tout x dans V et $1 \leq i \leq m$, $\psi_x^i(0) \in \overset{\circ}{D}_i$,*
- (iv) *si x appartient à A , alors $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$ est la composante de $M \setminus \text{im}(f_x)$ qui contient D_i , $1 \leq i \leq m$.*

Ce lemme sera prouvé dans la section suivante. Montrons qu'il implique le Lemme 3.

Démonstration du Lemme 3 quand N n'est pas un disque. Il résulte de (iv) que nous pouvons restreindre V de façon que, pour tout point x de V et $1 \leq i \leq m$, $\psi_x^i(\partial B)$ soit contenu dans $\overset{\circ}{N}$.

Définissons alors, pour x dans V , la fonction φ_x sur N par

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \notin \bigcup_{i=1}^m \psi_x^i(\overset{\circ}{B}), \\ \psi_x^i \circ s \circ (\psi_x^i)^{-1}(y) & \text{si } y \in \psi_x^i(\overset{\circ}{B}), \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

La condition (ii) garantit que cette définition a un sens. Pour montrer que φ_x est continue et que la fonction $\varphi: V \rightarrow \mathcal{C}(N)$ est continue, il suffit de vérifier que, si $\{x_n\}$ est une suite de points de V convergeant vers x et $\{y_n\}$ une suite de points de N tendant vers y , la suite $\{\varphi_{x_n}(y_n)\}$ a une sous-suite convergeant vers $\varphi_x(y)$ car, en appliquant ceci à une sous-suite arbitraire de la suite $\{\varphi_{x_n}(y_n)\}$, cela entraîne que la suite $\{\varphi_{x_n}(y_n)\}$ converge vers $\varphi_x(y)$. Distinguons deux cas:

1er cas. Il existe un i tel que y appartienne à $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$. Soit E un disque contenu dans $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$ et dont l'intérieur contient y ; pour n assez grand, y_n est dans E . D'après (i) et la continuité de ψ^i , si x_n est assez proche de x , E est contenu dans $\psi_{x_n}^i(\overset{\circ}{B})$. La convergence uniforme de $\psi_{x_n}^i$ vers ψ_x^i entraîne la convergence uniforme de la restriction de $(\psi_{x_n}^i)^{-1}$ à E vers la restriction de $(\psi_x^i)^{-1}$ à E . Par suite, $(\psi_{x_n}^i)^{-1}(y_n)$ tend vers $(\psi_x^i)^{-1}(y)$, donc $s \circ (\psi_{x_n}^i)^{-1}(y_n)$ tend vers $s \circ (\psi_x^i)^{-1}(y)$ et $\varphi_{x_n}(y_n)$ tend vers $\varphi_x(y)$.

2ème cas. y appartient à $N \setminus \bigcup_{i=1}^m \psi_x^i(\overset{\circ}{B})$. Si, pour une infinité d'indices n , y_n n'appartient pas à $\bigcup_{i=1}^m \psi_{x_n}^i(\overset{\circ}{B})$, le résultat est évident. Sinon, nous pouvons supposer que, pour un certain i , tous les y_n sont dans $\psi_{x_n}^i(\overset{\circ}{B})$. Posons $w_n = (\psi_{x_n}^i)^{-1}(y_n)$. Nous pouvons supposer que $\{w_n\}$ converge vers un point w de B . Puisque $y_n = \psi_{x_n}^i(w_n)$ tend vers y qui n'appartient pas à $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$, w appartient à ∂B . Alors, les suites $\{s(w_n)\}$ et $\{w_n\}$ ont la même limite w , donc la suite $\varphi_{x_n}(y_n) = \psi_{x_n}^i \circ s(w_n)$ a la même limite que la suite $\psi_{x_n}^i(w_n) = y_n$, soit y , d'où le résultat.

D'après sa définition, il est clair que φ_x est une rétraction de N sur $N \setminus \bigcup_{i=1}^m \psi_x^i(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{N}$, donc φ est une fonction continue de V dans $\mathcal{R}^\circ(N)$. D'après (iv), si x est dans A , $\text{im}(\varphi_x) = \text{im}(f_x)$, donc φ_x est dans $\mathcal{D}^\circ(N)$ pour x dans A ; $\mathcal{D}^\circ(N)$ étant ouvert dans $\mathcal{R}^\circ(N)$, nous pouvons supposer, en restreignant V , que φ prend ses valeurs dans $\mathcal{D}^\circ(N)$, d'où le Lemme 3.

4. DÉMONSTRATION DU LEMME 7

Dans cette section, N est une surface compacte connexe à bord non vide qui n'est pas un disque. Nous conservons les notations de la section précédente. Soit $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M ; $\hat{M}$ est homéomorphe à la sphère ou au plan. Soit r dans $\mathcal{D}^\circ(N)$; pour $1 \leq i \leq m$, soit G_i la composante de

$M \setminus \text{im}(r)$ qui contient D_i . Puisque G_i est simplement connexe, la restriction de π à chaque composante de $\pi^{-1}(G_i)$ est un homéomorphisme. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le

Lemme 8. *Chaque composante connexe de $\pi^{-1}(G_i)$ est relativement compacte dans $\hat{M}$.*

Démonstration. Supposons au contraire que la composante H de $\pi^{-1}(G_i)$ ne soit pas relativement compacte. Alors $\hat{M}$ est homéomorphe au plan et H contient une suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tendant vers l'infini. Posons $y_n = \pi(x_n)$; nous pouvons supposer que $\{y_n\}$ converge vers un point y de $\text{Fr}(G_i)$.

Puisque $\text{im}(r)$ est localement connexe, $\text{Fr}(G_i)$ l'est aussi. (Pour les continus plans, ceci est le théorème de Torhorst [19, p. 106]. Si p est un point de $\text{Fr}(G_i)$ et P_0, P_1, P_2 des disques tels que $p \in \overset{\circ}{P}_0$ et $P_j \subset \overset{\circ}{P}_{j+1}$ pour $j = 0, 1$, le Théorème (4.4), p. 113 de [19], appliqué au continu plan localement connexe $(\text{im}(r) \cap P_2) \cup (P_2 \setminus \overset{\circ}{P}_1)$ assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes de $G_i \cap \overset{\circ}{P}_1$ dont les fermetures rencontrent P_0 . L'application du théorème de Torhorst à chacune d'elles donne la connexité locale de $\text{Fr}(G_i)$ en p .) Soient E_1, E_2, E_3 des disques de M vérifiant

- (1) $y \in \overset{\circ}{E}_1$,
- (2) $E_j \subset E_{j+1}, j = 1, 2$.

Nous pouvons supposer les y_n contenus dans $\overset{\circ}{E}_1$. La restriction de π à chaque composante K de $\pi^{-1}(E_3)$ étant un homéomorphisme, $\overset{\circ}{K}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de points x_n ; il en résulte que chaque composante connexe de $\overset{\circ}{E}_3 \cap G_i$ ne contient qu'un nombre fini de points $\{y_n\}$ (car si L est un arc reliant y_j à y_k dans G_i , L a un relèvement unique $\hat{L}$ dans H ; si L est contenu dans $\overset{\circ}{E}_3$ et si x_j appartient à $\overset{\circ}{K}$, alors $\hat{L}$ est contenu dans $\overset{\circ}{K}$).

Soit $X = E_3 \cap (\text{im}(r) \cup (M \setminus \overset{\circ}{E}_2))$; il est facile de voir que X est un sous-continu (si E_2 est assez petit) localement connexe de E_3 . Si Q est une composante de $E_3 \setminus X$ qui contient l'un des y_n , alors Q rencontre E_1 et $\overline{Q}$ rencontre E_2 (dès que E_2 est assez petit pour que $G_i \setminus E_2 \neq \emptyset$). D'après ce qui précède, il y a une infinité de telles composantes, ce qui contredit le Théorème (4.4), p. 113 de [19].

Pour démontrer le Lemme 7, nous aurons besoin de résultats de la théorie des représentations conformes. Il est connu que, si H est un domaine borné simplement connexe du plan et p un point de H , il y a une unique représentation conforme h de $\overset{\circ}{B}$ sur H telle que $h(0) = p$ et $h'(0) > 0$. Si la frontière de H est localement connexe, h a un prolongement continu de B sur $\overline{H}$ [7]. La fonction h dépend continuellement de H au sens suivant [18, Théorème 2.2]. Soient $\{H_n\}_{n=0}^\infty$ des domaines bornés simplement connexes du plan contenant

un disque fermé fixé D ; supposons les frontières des H_n localement connexes, et soit p un point de $\overset{\circ}{D}$; soit h_n l'unique application continue de B sur $\overline{H_n}$ dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur H_n et qui vérifie $h_n(0) = p$ et $h'_n(0) > 0$. La suite $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers h_0 si la condition suivante est vérifiée:

(+) Il existe des rétractions ρ_n de $C \setminus \overset{\circ}{D}$ sur $C \setminus H_n$ telles que $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers ρ_0 sur $C \setminus \overset{\circ}{D}$.

Démonstration du Lemme 7. Soient M , D_i et $\hat{M}$ comme ci-dessus. Pour $1 \leq i \leq m$, soient E_i une composante fixée de $\pi^{-1}(D_i)$ et p_i un point fixé de $\overset{\circ}{E_i}$. Pour x dans A , les Lemmes 6 et 8 s'appliquent à $\text{im}(f_x)$; soit $G_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, la composante de $M \setminus \text{im}(f_x)$ qui contient D_i , et soit $H_i(x)$ la composante de $\pi^{-1}(G_i(x))$ qui contient E_i .

A l'aide d'un homéomorphisme fixé, nous identifions $\hat{M}$ au plan complexe C ou à la sphère de Riemann $S^2 = C \cup \{\infty\}$. Si $\hat{M} = C$, $H_i(x)$ est un sous-ensemble borné d'après le Lemme 8; si $\hat{M} = S^2$, l'intérieur de $\hat{M} \setminus H_i(x)$ n'est pas vide (car ou bien $\hat{M} \neq M$, ou bien $m \geq 2$; dans les deux cas, $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^m D_i)$ a au moins deux composantes). Nous pouvons donc appliquer les résultats cités de la théorie des représentations conformes (si $\hat{M} = S^2$, la condition $h'(0) > 0$ signifie que $h'(0)$ est un multiple positif d'un vecteur fixé du plan tangent à S^2 en p).

Pour x dans A et $1 \leq i \leq m$, la frontière de $H_i(x)$ est localement connexe (vérification laissée au lecteur). Notons h_x^i l'unique fonction continue de B sur $\overline{H_i(x)}$ dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur $H_i(x)$ et qui vérifie $h_x^i(0) = p_i$ et $(h_x^i)'(0) > 0$. La fonction $h^i: A \rightarrow \mathcal{C}(B, \hat{M})$ est continue. En effet, la rétraction f_x étant une équivalence homotopique, se relève en une unique rétraction $\hat{f}_x$ de $\hat{N} = \pi^{-1}(N)$ sur $\pi^{-1}(\text{im}(f_x))$; il est facile de voir que $\hat{f}: A \rightarrow \mathcal{R}(\hat{N})$ est continue. Nous pouvons alors définir une rétraction ρ_x de $\hat{M} \setminus \overset{\circ}{E_i}$ sur $\hat{M} \setminus H_i(x)$ par

$$\rho_x(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \hat{M} \setminus H_i(x), \\ \hat{f}_x(y) & \text{si } y \in \overline{H_i(x)} \setminus \overset{\circ}{E_i}. \end{cases}$$

Il est clair que ρ_x dépend continuellement de x , ce qui entraîne la continuité de h_i d'après ce que nous avons rappelé plus haut.

Le sous-ensemble $\mathcal{A}(B, C)$ de $\mathcal{C}(B, C)$ formé des fonctions dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme est un rétracte absolu de voisinage [11, Lemme 9]; son sous-ensemble $\mathcal{A}_0(B, C)$ formé des f telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$ en est un rétracte (envoyer f sur

$$\tilde{f}(z) = |f'(0)|(f(z) - f(0))/f'(0),$$

donc est aussi un rétracte absolu de voisinage. Le sous-ensemble Z_i de $\mathcal{C}(B, \hat{M})$ formé des fonctions h dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme de $\overset{\circ}{B}$ sur $h(\overset{\circ}{B})$, qui vérifient $h(0) = p_i$ et $h'(0) > 0$ et telles que $\hat{M} \setminus h(B)$ ait un intérieur non vide est localement homéomorphe à $\mathcal{A}_0(B, \mathbb{C})$, donc est un rétracte absolu de voisinage. Les fonctions h^i étant à valeurs dans Z_i , nous pouvons trouver un voisinage U de A dans X et des fonctions continues $k^i: U \rightarrow Z_i$ prolongeant h^i , $1 \leq i \leq m$.

Pour x dans U et $1 \leq i \leq m$, notons $\varepsilon_i(x)$ la borne supérieure des nombres $0 \leq t < 1$ vérifiant

- (1) Si p est une transformation du revêtement π autre que l'identité, alors $p(k_x^i(B_t)) \cap k_x^i(B_t) = \emptyset$,
- (2) $\pi \circ k_x^i(B_t) \cap \pi(\bigcup_{j=1, j \neq i}^m k_x^j(B)) = \emptyset$.

Si x appartient à A , $\varepsilon_i(x) = 1$ puisque, pour $t < 1$, $\pi(k_x^i(B_t)) = \pi(h_x^i(B_t)) \subset G_i(x)$, que $G_i(x)$ est disjoint des fermés $\overline{G_j(x)}$ pour $j \neq i$ et que la restriction de π à $H_i(x)$ est un homéomorphisme. Si, pour un x dans U et un t donné, k_x^i vérifie (1) et (2), alors, pour tout y assez proche de x , k_y^i vérifie aussi (1) et (2) pour le même t (c'est clair pour la condition (2), B_t et B étant compacts; pour la condition (1), utiliser le fait que, si P est un voisinage compact de $k_x^i(B_t)$, il n'y a qu'un nombre fini de transformations de revêtement p telles que $p(P) \cap P \neq \emptyset$). Par suite, pour $0 < t < 1$, l'ensemble $W_i(t)$ des points x de U vérifiant $\varepsilon_i(x) > t$ est ouvert dans U . Nous pouvons donc trouver des voisinages ouverts V_k , $k = 1, 2, \dots$, de A vérifiant

- (3) $\overline{V}_{k+1} \subset V_k$ quel que soit k ,
- (4) $\overline{V}_k \subset W_i(k/k+1)$ pour $1 \leq i \leq m$ et pour tout k ,
- (5) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k = A$.

En utilisant le lemme d'Urysohn, il est facile de construire une fonction continue $\delta: V_1 \rightarrow I$ vérifiant

- (6) $\delta(x) = 1$ si $x \in A$,
- (7) $(k-1)/k \leq \delta(x) \leq k/(k+1)$ si $x \in \overline{V}_k \setminus V_{k+1}$.

Il en résulte que

- (8) Si x appartient à $V_1 \setminus A$, alors $\delta(x) < \varepsilon_i(x)$ pour $1 \leq i \leq m$.

En effet, si x appartient à $\overline{V}_k \setminus V_{k+1}$, $\delta(x) \leq k/(k+1) < \varepsilon_i(x)$ d'après (4).

Soit $V = V_1$. Pour x dans V et $1 \leq i \leq m$, définissons la fonction $\psi_x^i: B \rightarrow M$ par

$$\psi_x^i(m) = \pi \circ k_x^i(\delta(x)w).$$

La continuité de $\psi^i: V \rightarrow \mathcal{C}(B, M)$ est claire. Pour x dans A , $\delta(x) = 1$, donc $\psi_x^i = \pi \circ h_x^i$ et $\psi_x^i|_{\overset{\circ}{B}}$ est un homéomorphisme de $\overset{\circ}{B}$ sur $G_i(x)$, d'où les conditions (i), (ii) et (iv) dans ce cas. La condition (iii) est vérifiée pour tout x

puisque $k_x^i(0) = p_i \in \overset{\circ}{E}_i$. Soit x dans $V \setminus A$; d'après (8) et (1), la restriction de π à $k_x^i(B_{\delta(x)})$ est un homéomorphisme, ce qui entraîne la condition (i); la condition (ii) résulte de (8) et (2). Le Lemme 7 est donc démontré.

5. DÉMONSTRATION DES LEMMES 3 ET 5 QUAND N EST UN DISQUE

Quand N est un disque, nous rencontrons deux difficultés supplémentaires. D'une part, l'argument donné à la section 3 pour prouver que Q est localement divisible par l^2 ne s'applique pas au voisinage d'une rétraction constante. D'autre part, dans ce cas $\hat{M} = M = S^2$ et il n'existe pas de représentation conforme de $\overset{\circ}{B}$ sur $S^2 \setminus \text{im}(f_x)$ quand $\text{im}(f_x)$ est réduite à un point, ce qui nous empêche d'appliquer directement les méthodes de la section précédente. Nous allons devoir faire un long détour pour contourner ces difficultés.

Soit $S^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 | y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ la sphère unité de l'espace euclidien. Nous identifions N à l'hémisphère inférieur de S^2 , $N = \{y \in S^2 / y_3 \leq 0\}$; soit $D = S^2 \setminus \overset{\circ}{N}$. Soit $p_0 = (0, 0, 1)$ le pôle nord de S^2 . Nous supposons S^2 munie de sa structure conforme habituelle et de la distance d induite par la norme euclidienne. Pour y dans S^2 et $0 < \varepsilon < 2$, nous notons $B(y, \varepsilon)$ le disque de S^2 de centre y et de rayon ε ; soit $C(y, \varepsilon)$ son bord. Si y est un point de S^2 , notons $\tilde{y}$ son antipode.

Nous utiliserons les deux faits suivant:

(A) Si H est un domaine simplement connexe de la sphère S^2 dont le complémentaire est localement connexe et contient plus d'un point, il y a une fonction continue de B dans S^2 dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur H . De plus, le Théorème (2.2) de [18] s'applique encore dans ce cas.

(B) Soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(B, S^2)$ formé des fonctions h vérifiant

- (i) la restriction de h à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme,
- (ii) l'intérieur de $S^2 \setminus h(B)$ n'est pas vide,
- (iii) $h(0) = p_0$,
- (iv) $h'(0) > 0$ (i.e., un multiple positif d'un vecteur fixé du plan tangent à S^2 en p_0).

Alors, $\mathcal{A}$ est un rétracte absolu de voisinage.

(B) résulte du fait que, comme les ensembles Z_i de la section précédente, $\mathcal{A}$ est localement homéomorphe à $\mathcal{A}_0(B, \mathbf{C})$.

Nous notons N_1 le sous-ensemble fermé homéomorphe à $\overset{\circ}{N}$ de $\mathcal{D}^\circ(N) = \mathcal{R}^\circ(N)$ formé des rétractions constantes. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{R}^\circ(N) \setminus N_1$ et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des rétractions r de $\mathcal{R}^\circ(N)$ telles que l'intérieur de $\text{im}(r)$ soit non vide.

Lemme 9. $\mathcal{G}$ est ouvert dans $\mathcal{R}^\circ(N)$.

Démonstration. Soit r un élément de $\mathcal{G}$. Prenons des disques D_1, D_2, D_3 de façon que

$$D_1 \subset \overset{\circ}{D}_2 \subset D_2 \subset \overset{\circ}{D}_3 \subset D_3 \subset \text{im}(r).$$

Soit C le bord de D_2 . Toute rétraction r' assez proche de r vérifie

$$(\alpha) \quad r'(D_2) \subset D_3 \text{ et } r'(C) \subset D_3 \setminus D_1,$$

$$(\beta) \quad 1_C = r|_C \text{ est homotope à } r'|_C \text{ dans } D_3 \setminus D_1.$$

Si, pour une telle r' , $\text{im}(r')$ ne contenait pas un point b de D_1 , alors, puisque $r'|_C$ est inessentielle dans $r'(D_2)$, C serait déformable en un point dans $D_3 \setminus \{b\}$, ce qui est faux. $\mathcal{G}$ contient donc toutes les rétractions vérifiant (α) et (β) , donc est un voisinage de r .

Lemme 10. $\mathcal{G}$ est un rétracte absolu de voisinage.

Démonstration. Soient X un espace métrique, A un fermé de X et $f: A \rightarrow \mathcal{G}$ une fonction continue. Compte-tenu de (A) et (B), l'argument utilisé aux §§3 et 4 pour prouver le Lemme 3 peut être appliqué à la fonction f pour montrer que cette fonction vérifie l'hypothèse du Lemme 2. Par suite, f peut se prolonger à un voisinage ouvert de A dans X et, puisque $\mathcal{G}$ est ouvert, nous pouvons supposer que ce prolongement est à valeurs dans $\mathcal{G}$, d'où le résultat.

Lemme 11. Il existe une homotopie $\Gamma: \mathcal{R}^\circ(N) \times I \rightarrow \mathcal{R}^\circ(N)$ vérifiant

- (i) $\Gamma_0 = \text{id}$,
- (ii) Si r appartient à N_1 , $\Gamma_t(r) = r$ quel que soit t ,
- (iii) Pour $t > 0$, $\Gamma_t(\mathcal{H})$ est contenu dans $\mathcal{G}$.

Démonstration. Pour r dans $\mathcal{H}$, soit h_r l'unique fonction continue de B dans S^2 dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur $S^2 \setminus \text{im}(r)$ et qui vérifie $h(0) = p_0$ et $h'(0) > 0$. D'après (A) et le Théorème (2.2) de [18], la fonction $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}(B, S^2)$ est continue.

Fixons un point x_0 de ∂B . Pour $0 < u \leq 1$, soit $E(u)$ le disque de diamètre u contenu dans B et tangent à ∂B en x_0 ; soit $K(u)$ le bord de $E(u)$. Pour $u = 0$, posons $E(0) = \{x_0\}$. Toute droite L passant par x_0 qui n'est pas tangente à B coupe $K(u)$ en un unique point distinct de x_0 , soit $e_L(u)$, ou simplement $e(u)$.

Soit T le sous-ensemble de $I \times I \times I$ formé des points (a, b, c) tels que ou bien $a = b = c = 0$, ou bien $0 < a < b < c < 1$. Pour (a, b, c) dans T , soit $\nu(a, b, c)$ la fonction de B sur B définie comme suit:

Si $a = b = c = 0$, $\nu(a, b, c) = \text{id}$.

Sinon, $\nu(a, b, c)$ est l'identité sur $E(a)$ et hors de $\overset{\circ}{E}(c)$, envoie $K(b)$ sur le point x_0 et, pour toute droite L passant par x_0 , est linéaire sur les segments $[e(a), e(b)]$ et $[e(b), e(c)]$.

Il est clair que ν dépend continuellement du point (a, b, c) de T .

Pour tout r dans $\mathcal{H}$, soit $\omega(r)$ la borne supérieure des nombres u vérifiant

- (1) $h_r(E(u)) \subset \overset{\circ}{N}$,
- (2) $\delta(h_r(E(u))) < \delta(\text{im}(r))$.

Alors, $\omega(r) > 0$ et l'on constate facilement que la fonction $\omega: \mathcal{H} \rightarrow]0, 1]$ est semi-continue inférieurement. Nous pouvons donc trouver [6, p. 171] une fonction continue $\theta: \mathcal{H} \rightarrow]0, 1[$ telle que

(3) $0 < \theta(r) < \omega(r)$ pour tout r dans $\mathcal{H}$.

Posant $\nu(r, t) = \nu(t\theta(r)/3, t\theta(r)/2, t\theta(r))$, définissons Γ comme suit: Si $r \in N_1$, $\Gamma(r, t) = r$ quel que soit t . Si $r \in \mathcal{H}$,

$$\Gamma(r, t)(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \notin h_r(E(t\theta(r))), \\ h_r \circ \nu(r, t) \circ h_r^{-1}(z) & \text{si } z \in h_r(E(t\theta(r)/2)), \\ r \circ h_r \circ \nu(r, t) \circ h_r^{-1}(z) & \text{si } z \in h_r(E(t\theta(r)) \setminus \overset{\circ}{E}(t\theta(r)/2)). \end{cases}$$

Cette définition a un sens car $\nu(r, t)$ est l'identité sur $K(t\theta(r))$ et, quand z appartient à $h_r(K(t\theta(r)/2))$, $\nu(r, t) \circ h_r^{-1}(z) = x_0$, donc les deux formules possibles donnent alors $\Gamma(r, t)(z) = h_r(x_0) = r(h_r(x_0))$. $\Gamma(r, t)$ est donc une fonction continue sur N . Comme on le vérifie facilement, $\Gamma(r, 0) = r$ et, pour r dans $\mathcal{H}$ et $t > 0$, $\Gamma(r, t)$ est une rétraction de N sur $\text{im}(r) \cup h_r(\overset{\circ}{E}(t\theta(r)/3))$; ce dernier ensemble a un intérieur non vide et est contenu dans $\overset{\circ}{N}$ d'après (3) et (1), donc $\Gamma(r, t)$ est un élément de $\mathcal{G}$.

La continuité de Γ en un point (r, t) avec r dans $\mathcal{H}$ résulte de la continuité des fonctions h , ν et θ . La continuité de Γ en un point (r_0, t_0) avec r_0 dans N_1 résulte du fait que, pour r dans $\mathcal{H}^\circ(N)$, ou bien $\Gamma(r, t) = r$, ou bien $\Gamma(r, t)$ coïncide avec r hors de l'ensemble $h_r(E(t\theta(r)))$, dont le diamètre est inférieur à $\delta(\text{im}(r))$ d'après (3) et (2), et envoie cet ensemble dans $\text{im}(r) \cup h_r(E(t\theta(r)))$.

Avant de continuer, notons deux propriétés de la fonction $\gamma = \Gamma_1$ qui nous seront utiles dans la suite

(C) Il existe une fonction continue α de $\mathcal{H}^\circ(N)$ dans $\overset{\circ}{N}$ vérifiant

- (i) $\alpha(r) \in \text{im}(\gamma(r))$ quel que soit r ,
- (ii) si r appartient à $\mathcal{H}$, $\alpha(r)$ est contenu dans l'intérieur de $\text{im}(\gamma(r))$.

Il suffit de prendre pour $\alpha(r)$ l'image de r si r est dans N_1 et l'image par h_r du centre du disque $E(\theta(r)/3)$ dans le cas contraire.

(D) Il existe une fonction continue $\xi: \mathcal{H}^\circ(N) \rightarrow \mathcal{C}(S^2)$ vérifiant

- (i) $\xi_r(\text{im}(\gamma(r))) = \text{im}(r)$,
- (ii) la restriction de ξ_r à $S^2 \setminus \text{im}(\gamma(r))$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur $S^2 \setminus \text{im}(r)$.

ξ peut se construire comme suit: Pour $t > 0$, soit $\sigma(t)$ la fonction de B sur B qui envoie $E(t/3)$ sur le point x_0 , est l'identité hors de $\overset{\circ}{E}(t)$ et, pour toute droite L passant par x_0 , envoie le segment $[e(t), e(t/3)]$ linéairement sur le segment $[e(t), x_0]$; σ dépend continuellement de t . La fonction ξ peut alors être définie comme suit: Si $r \in N_1$, $\xi_r = \text{id}$. Si $r \in \mathcal{H}$,

$$\xi_r(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \notin h_r(E(\theta(r))), \\ h_r \circ \sigma(\theta(r)) \circ h_r^{-1}(z) & \text{si } z \in h_r(E(\theta(r))). \end{cases}$$

Que cette définition a un sens et fournit une fonction continue de $\mathcal{R}^\circ(N)$ dans $\mathcal{C}(S^2)$ se démontre comme pour Γ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les conditions (i) et (ii).

Lemme 12. $\mathcal{H}$ est une l^2 -variété.

Démonstration. Soit $\Gamma' : \mathcal{H} \times I \rightarrow \mathcal{R}^\circ(N)$ la restriction de Γ . Alors (i) $\Gamma'_0 = \text{id}$, et (iii') pour $t > 0$, $\Gamma'_t(\mathcal{H})$ est contenu dans $\mathcal{G}$. Puisque $\mathcal{G}$ est un rétracte absolu de voisinage, cela entraîne, comme nous l'avons remarqué après le Lemme 1, que $\mathcal{H}$ en est un aussi. La démonstration du Lemme 5 quand N n'est pas un disque peut-être utilisée pour montrer que tout point de $\mathcal{H}$ a un voisinage ouvert divisible par l^2 . Puisque $\mathcal{H}$ est ouvert dans $\mathcal{R}^\circ(N)$, il est séparable et topologiquement complet. Comme nous l'avons rappelé plus haut, cela entraîne que $\mathcal{H}$ est une l^2 -variété.

Lemme 13. Il existe une fonction continue $\psi : \mathcal{R}^\circ(N) \rightarrow \mathcal{C}(B, S^2)$ telle que, pour tout r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$, la restriction de ψ_r à $\overset{\circ}{B}$ soit un homéomorphisme de $\overset{\circ}{B}$ sur $S^2 \setminus \text{im}(r)$ vérifiant $\psi_r(0) = p_0$.

Démonstration. Nous avons besoin d'une construction auxiliaire. Etant donné un point y de S^2 et des nombres $0 < a < b < 2$, soit $\mu(y, a, b)$ la fonction de S^2 sur S^2 définie comme suit: $\mu = \mu(y, a, b)$ est l'identité hors de $B(y, b)$ et en y , contracte $B(y, a)$ sur le point y et, pour tout demi-grand cercle L reliant y à son antipode $\tilde{y}$, envoie $L \cap (B(y, b) \setminus \overset{\circ}{B}(y, a))$ sur $L \cap B(y, b)$ linéairement (au sens de la longueur du sous-arc de L). Il est clair que $\mu(y, a, b)$ dépend continuellement du triple (y, a, b) .

Posons, pour r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$,

$$\varepsilon_1(r) = \frac{1}{4}d(\alpha(r), D) > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2(r) = \frac{1}{2}d(\alpha(r), D)$$

(rappelons que $D = S^2 \setminus \overset{\circ}{N}$, $\gamma = \Gamma_1$ et que α est introduite dans (C)). Définissons une fonction continue λ de $\mathcal{R}^\circ(N)$ dans $\mathcal{C}(S^2)$ par

$$\lambda_r = \mu(\alpha(r), \varepsilon_1(r), \varepsilon_2(r)).$$

Pour r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$, posons $G_r = S^2 \setminus \text{im}(\gamma(r))$, $H_r = \lambda_r^{-1}(G_r)$ et $F_r = S^2 \setminus H_r = \lambda_r^{-1}(\text{im}(\gamma(r)))$. Alors λ_r induit un homéomorphisme de H_r sur G_r . F_r est un continu localement connexe car, si $\text{im}(r)$ est réduite à un point, c'est le disque $B(\alpha(r), \varepsilon_1(r))$, sinon, ce disque est contenu dans l'intérieur de F_r , donc l'espace obtenu en l'identifiant à un point, qui est $\text{im}(\gamma(r))$ est homéomorphe à F_r . Puisque F_r est localement connexe, la frontière de H_r l'est aussi [19, p. 106], donc il y a une unique fonction continue k_r de B dans S^2 dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur H_r et qui vérifie $k_r(0) = p_0$ et $k'_r(0) > 0$.

Affirmation. $\lambda \circ k: \mathcal{R}^\circ(N) \rightarrow \mathcal{C}(B, S^2)$ est continue.

(La fonction k , au contraire, est discontinue aux points de N_1 .)

Une fois cette affirmation démontrée, la fonction ψ cherchée peut être définie par $\psi_r = \xi_r \circ \lambda_r \circ k_r$, où ξ est comme dans (D).

Pour vérifier cette affirmation, nous avons besoin de quelques définitions et résultats de la théorie des représentations conformes. Soient $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ des domaines simplement connexes de S^2 contenant un disque fixé de centre p_0 . Soit H l'ensemble (ouvert) des points p de S^2 pour lesquels il existe un voisinage V de p et un entier n_0 tels que H_n contienne V pour $n \geq n_0$. Le noyau de la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ (par rapport à p_0) est la composante connexe de H qui contient p_0 . On dit que la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers un domaine H_0 au sens de Carathéodory si toute sous-suite de $\{H_n\}$ a pour noyau H_0 .

Si H est un domaine simplement connexe de S^2 contenant p_0 , une coupure de H est un arc A dont les extrémités appartiennent à la frontière de H et dont l'intérieur est contenu dans H ; A décompose H en deux composantes et, s'il ne contient pas p_0 , nous notons $\delta(H; A)$ le diamètre de la composante de $H \setminus A$ qui ne contient pas p_0 . Pour $\varepsilon > 0$, soit $\eta(H, \varepsilon)$ la borne supérieure des nombres $\delta(H; A)$, où A parcourt l'ensemble $\mathcal{Q}(H, \varepsilon)$ des coupures de H de diamètre $< \varepsilon$ ne contenant pas p_0 .

Pour $n \geq 0$, soit H_n un domaine simplement connexe borné de S^2 (i.e., l'intérieur de $S^2 \setminus H_n$ n'est pas vide). Supposons que les H_n contiennent un disque fixé de centre p_0 , et soit k_n l'unique représentation conforme de $\overset{\circ}{B}$ sur H_n telle que $k_n(0) = p_0$ et $k'_n(0) > 0$. Alors

(E) La suite $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers k_0 sur tout compact de $\overset{\circ}{B}$ si, et seulement si, la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers H_0 au sens de Carathéodory [12, Théorème 2.1, p. 33].

Supposons en outre les frontières des H_n localement connexes, de sorte que k_n se prolonge continuellement à B . Alors

(F) La suite $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers k_0 sur B si, et seulement si, la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers H_0 au sens de Fréchet, i.e., vérifie les deux conditions suivantes:

(*)₁ $\{H_n\}$ converge vers H_0 au sens de Carathéodory,

(*)₂ $\lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \eta(H_n, \varepsilon) = 0$.

C'est une partie du Théorème 2.2 de [18].

Preuve de l'affirmation. Soit $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}^\circ(N)$ convergeant vers r_0 . Il nous faut prouver que $\lambda_{r_n} \circ k_{r_n}$ tend vers $\lambda_{r_0} \circ k_{r_0}$. Pour simplifier les notations, nous écrirons H_n, λ_n , etc., au lieu de H_{r_n}, λ_{r_n} , etc. Commençons par quelques observations

(a) La suite $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers G_0 au sens de Fréchet.

Cela résulte du Théorème 2.2(d) de [18] si $\text{im}(r_0)$ contient plus d'un point, c'est trivial dans le cas contraire.

(b) La suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers H_0 au sens de Carathéodory.

Ceci revient à vérifier qu'un point p de S^2 est dans F_0 si, et seulement si, tout voisinage de p rencontre une infinité d'ensembles F_n . Si V est un voisinage compact de p tel que $V \cap F_{n_k} \neq \emptyset$ pour une infinité d'indices n_k , soit, pour tout k , x_k un point de $V \cap F_{n_k}$. Nous pouvons supposer que x_k tend vers un point x_0 de V . Puisque λ_n tend vers λ_0 , $\lambda_{n_k}(x_k)$ tend vers $\lambda_0(x_0)$. Puisque r_n tend vers r_0 et que $\lambda_{n_k}(x_k)$ appartient à $\text{im } \gamma(r_{n_k})$, $\lambda_0(x_0)$ appartient à $\text{im } \gamma(r_0)$, donc $\lambda_0(V) \cap \text{im } \gamma(r_0) \neq \emptyset$. Si cela est vrai pour tout voisinage compact de p , $\lambda_0(p)$ appartient à $\text{im } \gamma(r_0)$, donc p appartient à F_0 . Inversement, soit p un point de F_0 . Si p est dans $B(\alpha(r_0), \varepsilon_1(r_0))$, il est, d'après la continuité de α et ε_1 , dans la limite supérieure des ensembles $B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n)) \subset F_n$. Sinon, pour tout voisinage assez petit V de p , $\lambda_0(V)$ est un voisinage de $\lambda_0(p) = \gamma(r_0)(\lambda_0(p))$ et $V = \lambda_0^{-1}\lambda_0(V)$. Mais $\gamma(r_n)(\lambda_0(p))$ tend vers $\gamma(r_0)(\lambda_0(p))$, donc $\lambda_0(V)$ contient presque tous les points $\gamma(r_n)(\lambda_0(p))$ et V contient presque tous les $\lambda_n^{-1}\gamma(r_n)(\lambda_0(p)) \subset F_n$. (Car, si V est assez petit pour que $V \cap B(\alpha(r_0), \varepsilon_1(r_0)) = \emptyset$, alors $\alpha(r_n)$ n'appartient pas à $\lambda_0(V)$ pour n assez grand, donc λ_n induit un homéomorphisme de $\lambda_n^{-1}(\lambda_0(V))$ sur $\lambda_0(V)$, et $\lambda_n^{-1}|\lambda_0(V)$ converge uniformément vers $\lambda_0^{-1}|\lambda_0(V)$ d'après la définition des λ_r .)

(c) Les fonctions $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ forment une famille uniformément équicontinue. C'est clair puisque $\{\lambda_n\}$ converge uniformément vers λ_0 .

(d) Pour tout $a > 0$, il existe un n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\lambda_n(B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n)))$ soit contenu dans $B(\alpha(r_0), a)$ et que les restrictions des fonctions λ_n^{-1} , $n \geq n_0$, à $S^2 \setminus \overset{\circ}{B}(\alpha(r_0), a)$ forment une famille uniformément équicontinue.

La vérification, qui utilise la continuité de α et de ε_1 et la définition géométrique de la fonction λ , est laissée au lecteur.

(e) Si $\text{im}(r_n)$ n'est pas réduite à un point, λ_n établit une bijection entre les coupures de H_n ne contenant pas p_0 et les coupures de G_n ne contenant pas p_0 .

Car, dans ce cas, $B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n))$ est contenu dans l'intérieur de F_n , donc la restriction de λ_n à la fermeture de H_n est un homéomorphisme de $\overline{H}_n$ sur $\overline{G}_n$, et $\lambda_n(p_0) = p_0$.

Distinguons deux cas:

1^{er} cas. $\text{im}(r_0)$ contient plus d'un point. Nous allons montrer qu'alors $\{k_n\}$ tend vers k_0 . D'après (b), la suite $\{H_n\}$ vérifie $(*)_1$, donc, d'après (F), il suffit de montrer qu'elle vérifie aussi $(*)_2$.

Puisque r_0 appartient à $\mathcal{H}$, $\text{im}(\gamma(r_0))$ contient un disque $B(\alpha(r_0), a)$ d'après (C); soit $0 < a' < a$.

Quitte à supprimer un nombre fini de termes de la suite, nous pouvons supposer que r_n appartient à $\mathcal{H}$ pour tout n et, d'après (d), que

(1) $\lambda_n(B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n))) \subset B(\alpha(r_0), a')$ quel que soit n ,

- (2) les fonctions $\lambda_n^{-1}|S^2 \setminus B(\alpha(r_0), a')$ forment une famille uniformément équicontinue.

La continuité de α et de γ permet de supposer aussi, quitte à supprimer un nombre fini de termes, que nous avons

- (3) $B(\alpha(r_0), a') \subset \text{im}(\gamma(r_n))$ quel que soit n .

D'après (e), λ_n établit une bijection, encore notée λ_n , entre l'ensemble des coupures de H_n ne contenant pas p_0 et l'ensemble des coupures de G_n ne contenant pas p_0 . D'après (c), λ_n envoie l'ensemble $\mathcal{Q}(H_n, \varepsilon)$ dans un ensemble $\mathcal{Q}(G_n, \varepsilon')$, où ε' ne dépend pas de $n \geq 1$ et tend vers 0 avec ε . D'après (a), $\eta(G_n, \varepsilon')$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et ε vers 0. Puisque, pour A dans $\mathcal{Q}(H_n, \varepsilon)$, λ_n envoie la composante de $H_n \setminus A$ qui ne contient pas p_0 sur la composante de $G_n \setminus \lambda_n(A)$ qui ne contient pas p_0 et que, d'après (3), cette composante est disjointe de $B(\alpha(r_0), a')$, il résulte de (2) que $\eta(H_n, \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et ε vers 0.

2ème cas. r_0 appartient à N_1 ; alors $\gamma(r_0) = r_0$. Etant donné un $\delta > 0$, soit $K = S^2 \setminus \lambda_0^{-1}(\mathring{B}(\alpha(r_0), \delta))$; c'est un compact contenu dans H_0 . Soit P un compact de $\mathring{B}$ dont l'intérieur contient $k_0^{-1}(K)$. Puisque $k_n|_{\mathring{B}}$ est une représentation conforme et que la suite $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers k_0 sur tout compact de $\mathring{B}$ (d'après (b) et (E)), nous pouvons trouver un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $k_n(P)$ contienne K et que $d(\lambda_n k_n(w), \lambda_0 k_0(w)) < \delta$ pour tout w dans P . Alors, si $n \geq n_0$ et si w est un point de B n'appartenant pas à P , $k_n(w)$ n'appartient pas à K , de même que $k_0(w)$, donc $\lambda_n k_n(w)$ et $\lambda_0 k_0(w)$ sont tous deux dans $B(\alpha(r_0), \delta)$, d'où $d(\lambda_n k_n(w), \lambda_0 k_0(w)) < 2\delta$. Par suite, $d(\lambda_n \circ k_n, \lambda_0 \circ k_0) < 2\delta$ pour $n \geq n_0$, d'où le résultat dans ce cas.

Lemme 14. *Il existe une homotopie $\varphi: \mathcal{R}^\circ(N) \times I \rightarrow \mathcal{R}^\circ(N)$ vérifiant*

- (i) $\varphi_0 = \text{id}$,
- (ii) *pour $t > 0$, la fermeture de $\varphi_t(\mathcal{R}^\circ(N))$ est contenue dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $\psi: \mathcal{R}^\circ(N) \rightarrow \mathcal{C}(B, S^2)$ la fonction construite à l'étape précédente. Reprenons les notations de la démonstration du Lemme 11. Si x_0 est le point fixé de ∂B , posons, pour r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$, $\beta(r) = \psi_r(x_0)$. Pour r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$, soit $\sigma(r)$ la borne supérieure des nombres u vérifiant

$$(1) \quad \psi_r(E(u)) \subset \mathring{N}.$$

Puisque la fonction ψ vérifie $\psi_r(0) = p_0$ quel que soit r , $\psi_r(E(1))$ rencontre $\mathring{D}$, d'où

$$(2) \quad \sigma(r) < 1 \quad \text{quel que soit } r.$$

Pour r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$ et $0 < t \leq 1$, soit $\tau(r, t)$ la borne inférieure des nombres u vérifiant

$$(3) \quad \delta(\psi_r(E(u))) > \frac{t}{2} d(\beta(r), D).$$

Nous convenons que $\tau(r, 0) = 0$, de sorte que

$$(4) \quad \tau(r, t) = 0 \quad \text{si, et seulement si, } t = 0.$$

Il est facile de voir que σ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{R}^\circ(N)$ et τ semi-continue supérieurement sur $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$. De plus, si $u \geq \sigma(r)$, $\psi_r(E(u))$ rencontre D , donc $\delta(\psi_r(E(u))) \geq d(\beta(r), D)$, d'où immédiatement $\tau(r, t) < \sigma(r)$. Nous pouvons donc trouver [6, p. 171] une fonction continue $\zeta: \mathcal{R}^\circ(N) \times I \rightarrow I$ vérifiant

$$(5) \quad \tau(r, t) < \zeta(r, t) < \sigma(r) \quad \text{quels que soient } r \text{ et } t.$$

Pour $n \geq 1$, soit W_n l'ensemble des points (r, t) de $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$ pour lesquels $\tau(r, t) < 1/n$; c'est un ouvert de $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$ et, d'après (4), $\mathcal{R}^\circ(N) \times \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$. Nous pouvons donc trouver des ouverts V_n de $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$ vérifiant

$$(6) \quad \overline{V}_{n+1} \subset V_n \quad \text{pour tout } n,$$

$$(7) \quad V_n \subset W_n \quad \text{pour tout } n,$$

$$(8) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \mathcal{R}^\circ(N) \times \{0\}.$$

Il est alors facile, à l'aide du lemme d'Urysohn, de construire une fonction continue $\chi: \mathcal{R}^\circ(N) \times I \rightarrow I$ de façon que

$$\begin{aligned} \chi(r, 0) &= 0 \quad \text{pour tout } r, \\ \chi(r, t) &= 1 \quad \text{si } (r, t) \notin V_2, \\ \frac{1}{n} &\leq \chi(r, t) \leq \frac{1}{n-1} \quad \text{si } (r, t) \in \overline{V}_n \setminus V_{n+1}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Alors χ vérifie

$$(9) \quad \tau(r, t) < \chi(r, t) \quad \text{si } t > 0.$$

En effet, si $(r, t) \in \overline{V}_n \setminus V_{n+1}$, $n \geq 2$, $\tau(r, t) < \frac{1}{n} \leq \chi(r, t)$ d'après (7), et si $(r, t) \notin V_2$, $\chi(r, t) = 1 > \sigma(r) > \tau(r, t)$.

Posons $\varepsilon_3(r, t) = \min(\zeta(r, t), \chi(r, t))$. C'est une fonction continue de $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$ dans I qui vérifie, d'après (5), (9) et le choix de χ ,

$$(10) \quad \tau(r, t) < \varepsilon_3(r, t) < \sigma(r) < 1 \quad \text{si } t > 0,$$

$$(11) \quad \varepsilon_3(r, 0) = 0.$$

Puisque τ est semi-continue supérieurement, la relation (10) nous permet de trouver des fonctions continues $\varepsilon_1, \varepsilon_2: \mathcal{R}^\circ(N) \times]0, 1] \rightarrow I$ vérifiant

$$(12) \quad 0 < \tau(r, t) < \varepsilon_1(r, t) < \varepsilon_2(r, t) < \varepsilon_3(r, t) \quad \text{pour } t > 0.$$

Il résulte de (11), (12) et de la continuité de ε_3 que, si nous prolongeons ε_1 et ε_2 à $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$ en posant $\varepsilon_1(r, 0) = \varepsilon_2(r, 0) = 0$, les fonctions ainsi obtenues

sont continues. Alors, quelque soit (r, t) , $(\varepsilon_1(r, t), \varepsilon_2(r, t), \varepsilon_3(r, t))$ est un point de T et nous pouvons poser $\nu(r, t) = \nu(\varepsilon_1(r, t), \varepsilon_2(r, t), \varepsilon_3(r, t))$. Définissons alors φ par

$$\varphi(r, t)(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \notin \psi_r(E(\varepsilon_3(r, t))), \\ \psi_r \circ \nu(r, t) \circ \psi_r^{-1}(z) & \text{si } z \in \psi_r(E(\varepsilon_2(r, t))), \\ r \circ \psi_r \circ \nu(r, t) \circ \psi_r^{-1}(z) & \text{si } z \in \psi_r(E(\varepsilon_3(r, t)) \setminus \overset{\circ}{E}(\varepsilon_2(r, t))). \end{cases}$$

Comme dans le cas de Γ , on vérifie que cette définition a un sens et, puisque les fonctions ψ , ν et ε_j sont continues, détermine une fonction continue de $\mathcal{R}^\circ(N) \times I$ dans $\mathcal{R}^\circ(N)$ telle que $\varphi_0 = \text{id}$ et que, pour $t > 0$, $\varphi(r, t)$ ait pour image $\text{im}(r) \cup \psi_r(E(\varepsilon_1(r, t)))$, dont le diamètre est $> \frac{1}{2}d(\beta(r), D)$ d'après (12) et (3).

Supposons la condition (ii) en défaut. Alors, pour un certain $t > 0$, il y a une suite $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ de rétractions telle que $\{\varphi(r_n, t)\}$ converge vers $r_0 \in N_1$. Puisque $\text{im}(r_0)$ est réduite à un point m , $\beta(r_n)$, qui appartient à $\text{im}(r_n)$, tend vers m , donc $d(\beta(r_n), D)$ tend vers $d(m, D) > 0$; il y a donc un $\alpha > 0$ tel que $d(\beta(r_n), D) > \alpha$ quel que soit n , donc le diamètre de $\text{im}(\varphi(r_n, t))$ est $\geq t\frac{\alpha}{2}$ pour tout n , ce qui est impossible puisque $\{\varphi(r_n, t)\}$ converge vers une fonction constante, d'où (ii).

Nous sommes maintenant enfin au bout de nos peines. En effet, les Lemmes 12 et 14 entraînent, comme nous l'avons rappelé après le Lemme 1, que $\mathcal{R}^\circ(N)$ est une l^2 -variété, ce qui contient le Lemme 3 pour un disque. Le Lemme 4 est donc encore vrai dans ce cas et la démonstration du Lemme 5 montre que le sous-ensemble ouvert $\mathcal{K}$ de $Q(N)$ formé des rétractions non constantes est localement divisible par l^2 , donc une l^2 -variété. La déformation φ construite au Lemme 14 a la propriété que, quels que soient r dans $\mathcal{R}^\circ(N)$ et t dans I , $\varphi(r, t)|\partial N = r|\partial N$. Cela permet de définir une homotopie $\bar{\varphi}: Q \times I \rightarrow Q$ par

$$\bar{\varphi}(\rho, t)(z) = \begin{cases} \rho(z) & \text{si } z \notin \overset{\circ}{N}, \\ \varphi(\rho|N, t)(z) & \text{si } z \in N. \end{cases}$$

Alors $\bar{\varphi}_0 = \text{id}$ et la condition (ii) pour φ entraîne que, pour $t > 0$, la fermeture de $\bar{\varphi}_t(Q)$ est contenue dans $\mathcal{K}$. Puisque $\mathcal{K}$ est une l^2 -variété, Q aussi, d'où le Lemme 5 dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

1. V. N. Basmanov et A. G. Savchenko, *L'espace de Hilbert comme espace des rétractions d'un arc (en russe)*, Mat. Zametki **42** (1987), 94–100.
2. K. Borsuk, *Concerning the set of retractions*, Colloq. Math. **18** (1967), 197–201.
3. L. Boxer, *Retraction spaces and the homotopy metric*, Topology Appl. **11** (1980), 17–29.
4. R. Cauty, *Un théorème de sélection et l'espace des rétractions d'une surface*, Amer. J. Math. **97** (1975), 282–290.
5. T. A. Chapman, *The space of retractions of a compact Hilbert cube manifold is an A.N.R.*, Topology Proc. **2** (1977), 409–430.

6. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.
7. E. E. Floyd, *On the extension of homeomorphisms on the interior of a two cell*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 654–658.
8. R. Geoghegan, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions*. I, Topology **11** (1972), 159–177.
9. D. W. Henderson and R. M. Schori, *Topological classification of infinite dimensional manifolds by homotopy type*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 121–124.
10. S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich., 1965.
11. R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.
12. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*. iII, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
13. K. Sakai, *The space of retractions of a compact Q -manifold is an l^2 -manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 421–424.
14. H. Toruńczyk, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, Fund. Math. **86** (1974), 53–67.
15. ———, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 89–93.
16. N. R. Wagner, *The space of retractions of the 2-sphere and the annulus*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 319–329.
17. ———, *The space of retractions of a 2-manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 609–614.
18. ———, *A continuity property with applications to the topology of 2-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 369–393.
19. G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1942.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI, U.E.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4 PLACE JUSSIEU,
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE