L'ESPACE DES ARCS D'UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. We prove that, for any surface M , the space of arcs contained in M , with the topology induced by the Hausdorff distance, is homeomorphic to $M \times \Sigma^\infty$, where $\Sigma = \{(x_i) \in l^2 / \sum_{i=1}^\infty (ix_i)^2 < \infty\}$.

1. INTRODUCTION ET PRÉLIMINAIRES

Tous les espaces considérés ici sont supposés métriques séparables et munis d'une distance d fixée, mais arbitraire, sauf indication contraire. Nous noterons $C(X)$ l'espace des sous-continus de X muni de la topologie définie par la distance de Hausdorff associée à d ; il est connu que la topologie ainsi obtenue sur $C(X)$ ne dépend pas du choix de d . Soit $a(X)$ le sous-ensemble de $C(X)$ formé des continus homéomorphes à un arc. S. B. Nadler Jr. a demandé [9, p. 606] si l'on pouvait trouver un modèle bien compris de $a(\mathbb{R}^2)$. Nous allons donner ici un tel modèle pour $a(M)$ quand M est une surface quelconque. Considérons le sous-espace suivant de l'espace de Hilbert l^2 : $\Sigma = \{(x_i) \in l^2 / \sum_{i=1}^\infty (ix_i)^2 < \infty\}$; soit Σ^∞ le produit d'une infinité dénombrable de copies de Σ . Nous démontrerons le résultat suivant:

1.1. Théorème. *Pour toute surface M , avec ou sans bord, $a(M)$ est homéomorphe à $M \times \Sigma^\infty$.*

La démonstration utilise une caractérisation de Σ^∞ due à Bestvina et Mogilski, que nous rappellerons dans le §2.

La distance sur un espace métrique sera toujours notée d , et la distance de Hausdorff associée sur $C(X)$ sera toujours notée ρ . Si A et B sont des sous-ensembles de X , nous poserons $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$; si $A = \{x\}$, nous écrirons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$. Si C est un élément de $C(X)$ et K un sous-ensemble de $C(X)$, nous poserons $\rho(C, K) = \inf_{C' \in K} \rho(C, C')$. La boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon ε sera notée $B(x, \varepsilon)$ (resp. $\bar{B}(x, \varepsilon)$). Si $\varepsilon = 0$, $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{x\}$. La boule ouverte de centre C et de rayon ε dans $C(X)$ sera notée $B_\rho(C, \varepsilon)$.

Si X et Y sont des espaces métriques, nous noterons $\mathcal{C}(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y avec la topologie compacte ouverte, laquelle coïncide, dans les cas particuliers utilisés ci-dessous, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X . Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est appelée un plongement si c'est un homéomorphisme de X sur $f(X)$. Une

Received by the editors June 10, 1989 and, in revised form, March 29, 1990.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 54B20, 57N05, 57N20.

©1992 American Mathematical Society
0002-9947/92 \$1.00 + \$.25 per page

fonction $f: X \rightarrow Y$ est dite fermée au-dessus d'un sous-ensemble A de Y si, pour tout a dans A et tout voisinage U de $f^{-1}(a)$ dans X , il existe un voisinage V de a dans Y , tel que $f^{-1}(V) \subset U$ (cette définition implique que si un point de A n'est pas dans $f(X)$, il n'appartient pas à la fermeture de $f(X)$).

Nous noterons id_X , ou simplement id , l'identité de X . Nous noterons I l'intervalle $[0, 1]$. Une homotopie est une fonction continue $h: X \times I \rightarrow Y$. Pour une telle homotopie, nous noterons h_t la fonction $h_t(x) = h(x, t)$ de X dans Y .

Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha / \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert d'un espace X . Pour tout sous-ensemble K de X , nous noterons $\text{St}(K, \mathcal{U})$ la réunion des éléments de $\mathcal{U}$ rencontrant K , et nous poserons $\text{St}(\mathcal{U}) = \{\text{St}(U_\alpha, \mathcal{U}) / \alpha \in A\}$. Si f et g sont deux fonctions de Y dans X , nous dirons que f est $\mathcal{U}$ -proche de g si, pour tout y dans Y , il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$.

Nous utiliserons des méthodes développées dans un article précédent [3], dont nous rappellerons quelques résultats. Nous regardons la sphère de Riemann, munie de sa structure conforme habituelle, tantôt comme le compactifié $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du plan complexe, tantôt comme la sphère unité $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, les deux étant identifiés par projection stéréographique depuis le pôle nord $(0, 0, 1)$. Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$; pour $0 < t < 1$, posons $S(t) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = t\}$, $B(t) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < t\}$ et $\overline{B}(t) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq t\}$. Notons S^1 le bord de D .

Soit $\text{c.e.}(S^2)$ le sous-ensemble de $C(S^2)$ formé des continus cellulaires, et soit $\text{c.e.}^*(S^2)$ le sous-ensemble de $\text{c.e.}(S^2)$ formé des continus non dégénérés. Posons $\text{c.e.}(D) = \text{c.e.}(S^2) \cap C(D)$ et $\text{c.e.}^*(D) = \text{c.e.}^*(S^2) \cap C(D)$.

Fixons un point p_0 de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Pour C dans $\text{c.e.}^*(D)$, soit f_C l'unique représentation conforme de D sur $S^2 \setminus C$ vérifiant $f_C(0) = p_0$ et $f'_C(0) > 0$ (voir [12, Théorème 1.3, p. 13]).

1.2. Lemme. *La fonction $F: \text{c.e.}^*(D) \rightarrow \mathcal{C}(D, S^2)$ définie par $F(C) = f_C$ est continue.*

Ceci est prouvé au début de la démonstration du Lemme 3.2 de [3].

Soit $\text{c.e.}_v(S^2)$ le sous-ensemble de $\text{c.e.}(S^2)$ formé des continus non dégénérés dont l'intérieur est vide, et soit $\text{c.e.}_v(D) = \text{c.e.}_v(S^2) \cap \text{c.e.}(D)$. Définissons une fonction $\Pi: \text{c.e.}_v(D) \times]0, 1] \rightarrow C(S^2)$ par

$$\Pi(C, 1) = C, \quad \Pi(C, t) = f_C(S(t)) \quad \text{si } 0 < t < 1.$$

1.3. Lemme. *La fonction Π est continue.*

C'est le Lemme 6.2 de [3].

2. CARACTÉRISATION DE Σ^∞

Rappelons d'abord quelques définitions. Soit X un rétracte absolu de voisinage. Un sous-ensemble F de X est appelé un Z -ensemble dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X , il existe une fonction continue f de X dans X , $\mathcal{U}$ -proche de id_X , telle que $f(X) \subset X \setminus F$. F est un Z -ensemble au sens fort si, de plus, il est toujours possible de choisir la fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap F = \emptyset$. En général, ces deux notions diffèrent

(voir [1]); cependant, lorsque X est une l^2 -variété, tout Z -ensemble dans X est un Z -ensemble au sens fort [5]. Il est connu [2, Corollaire 1.2] qu'un fermé F d'un rétracte absolu de voisinage X est un Z -ensemble au sens fort si, et seulement si, il existe une homotopie $h: X \times I \rightarrow X$ vérifiant (i) $h_0 = \text{id}$, (ii) $h_t(X) \subset X \setminus F$ pour tout $t > 0$, et (iii) h est fermée au-dessus de F ; ceci s'applique donc à tout Z -ensemble d'une l^2 -variété. Il est aussi connu que, si F est un Z -ensemble dans X et U un ouvert de X , $U \cap F$ est un Z -ensemble dans U . Une fonction $f: C \rightarrow X$ est appelée un Z -plongement si c'est un plongement et si $f(C)$ est un Z -ensemble dans X .

Nous noterons $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ la classe de tous les espaces métriques séparables qui sont des $F_{\sigma\delta}$ absolus. Un rétracte absolu de voisinage X est dit $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -universel si, pour tout espace C appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, toute fonction continue $f: C \rightarrow X$, et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X , il existe un Z -plongement $g: C \rightarrow X$ qui est $\mathcal{U}$ -proche de f ; X est dit fortement $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -universel si, pour tout espace C appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, tout fermé E de C , toute fonction continue $f: C \rightarrow X$ dont la restriction à E est un Z -plongement, et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X , il existe un Z -plongement $g: C \rightarrow X$ que est $\mathcal{U}$ -proche de f et vérifie $g|E = f|E$.

2.1. Lemme. *Un rétracte absolu X appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ est homéomorphe à Σ^∞ si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes:*

(C.1) *X est fortement $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -universel,*

(C.2) *$X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, où chaque X_n est un Z -ensemble au sens fort dans X .*

Ceci est un cas particulier du Théorème 6.5 de [2] (la discussion, pp. 310–311 de [2], montre que Σ^∞ est homéomorphe à l'espace noté Ω_2 dans [2]).

Les conditions (C.1) et (C.2) peuvent être simplifiées lorsque, comme ce sera le cas ici, X peut être plongé dans un espace L de façon que le couple (L, X) vérifie l'hypothèse suivante:

(H) L est homéomorphe à l^2 et il existe une homotopie $h: L \times I \rightarrow L$ vérifiant (i) $h_0 = \text{id}$ et (ii) $h_t(L) \subset X$ pour $t > 0$.

2.2. Lemme. *Sous l'hypothèse (H), tout Z -ensemble dans X est un Z -ensemble au sens fort dans X .*

C'est une conséquence de la Proposition 1.7 de [2].

2.3. Lemme. *Sous l'hypothèse (H), la condition (C.1) résulte de la suivante:*

(C.1') *Pour tout sous-ensemble ouvert U de L , tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U et tout sous-ensemble F de U de type $F_{\sigma\delta}$, il existe un Z -plongement g de U dans U vérifiant (i) g est $\mathcal{U}$ -proche de id_U , et (ii) $g(U) \cap X = g(F)$.*

Démonstration. Compte tenu du lemme précédent et de la Proposition 2.2 de [2], il suffit de montrer que tout ouvert U de X est $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -universel. Soient C un espace appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, f une fonction continue de C dans X et $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ un recouvrement ouvert de X . Pour tout j dans J , soit U'_j un ouvert de L tel que $U'_j \cap X = U_j$, et soit $U' = \bigcup_j U'_j$; c'est un ouvert de L vérifiant $U' \cap X = U$. Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de U' tel que $\text{St}(\mathcal{V})$ soit plus fin que $\mathcal{U}' = \{U'_j \mid j \in J\}$.

D'après le Lemme 3.8 de [10], il y a un plongement g_1 de C dans U' qui est $\mathcal{V}$ -proche de f (l'hypothèse que l'espace de départ Y est complet dans l'énoncé du Lemme 3.8 de [10] n'est pas utilisée dans la démonstration). Alors, $g_1(C)$ est un $F_{\sigma\delta}$ dans U' , donc la condition (C.1'), appliquée à U' , fournit un Z -plongement g_2 de U' dans U' vérifiant

- (1) g_2 est $\mathcal{V}$ -proche de $\text{id}_{U'}$,
- (2) $g_2(U') \cap X = g_2(g_1(C))$.

Soit $g = g_2 \circ g_1$. D'après (2), g_2 est un plongement de C dans X qui, d'après (1), est $\mathcal{V}$ -proche de g_1 , donc $\mathcal{U}$ -proche de f . Puisque $g_2(U')$ est fermé dans U' , $g(C) = g_2(U') \cap X$ est fermé dans U . Pour voir que $g(C)$ est un Z -ensemble dans U , soit $\mathcal{H} = \{H_m \mid m \in M\}$ un recouvrement ouvert de U . Pour m dans M , soit H'_m un ouvert de U' tel que $H'_m \cap X = H_m$; posons $\mathcal{H}' = \{H'_m \mid m \in M\}$ et $H' = \bigcup_m H'_m$. H' est un ouvert de U' tel que $H' \cap X = U$. Soit $\mathcal{K}$ un recouvrement ouvert de H' tel que $\text{St}(\mathcal{K})$ soit plus fin que $\mathcal{H}'$. Puisque $g_2(U')$ est un Z -ensemble dans U' , $g_2(U') \cap H'$ est un Z -ensemble de la l^2 -variété H' . Nous pouvons donc trouver une fonction continue k_1 de H' dans H' , $\mathcal{K}$ -proche de $\text{id}_{H'}$, telle que la fermeture R de $k_1(H')$ dans H' soit disjointe de $g_2(U') \cap H'$. Nous pouvons donc trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{K}_1$ de H' , plus fin que $\mathcal{K}$ et tel qu'aucun élément de $\text{St}(\mathcal{K}_1)$ ne rencontre à la fois R et $g_2(U')$. Il est possible de construire une fonction continue $\alpha: H' \rightarrow]0, 1]$ telle que, pour tout x dans H' , $h(x, \alpha(x))$ appartienne à $H' \cap X$ et que, définissant k_2 par $k_2(x) = h(x, \alpha(x))$, la fonction k_2 soit $\mathcal{K}_1$ -proche de k_1 , ce qui, d'après le choix de $\mathcal{K}_1$, entraîne $k_2 \circ k_1(H') \subset (H' \setminus g_2(U')) \cap X$. Alors, la restriction k de $k_2 \circ k_1$ à U est $\mathcal{K}$ -proche de id_U et vérifie $k(U) \subset U \setminus g_2(U') = U \setminus g(C)$, ce qui montre que $g(C)$ est un Z -ensemble dans U , donc que U est $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -absorbant, d'où le lemme.

Une Σ^∞ -variété est un espace métrique dont tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de Σ^∞ .

2.4. Lemme. *Deux Σ^∞ -variétés sont homéomorphes si, et seulement si, elles ont le même type d'homotopie.*

Ce résultat est implicite dans la démonstration du Corollaire 5.6 de [2] où il est prouvé que si X est une Σ^∞ -variété et K un complexe simplicial localement fini ayant le type d'homotopie de X , X est homéomorphe à $K \times \Sigma^\infty$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 QUAND LE BORD DE M EST VIDE

Tout arc J contenu dans M a, dans M , un voisinage ouvert E homéomorphe à D . Alors, $a(E)$ est un voisinage de J dans $a(M)$ homéomorphe à $a(D)$. D'après le Lemme 2.4, il suffit, pour prouver le théorème, de montrer que $a(D)$ est homéomorphe à Σ^∞ et que $a(M)$ a le type d'homotopie de M .

3.1. Lemme. *Il existe une homotopie $\Theta: \text{c.e.}^*(D) \times I \rightarrow \text{c.e.}^*(D)$ vérifiant*

- (i) $\Theta_0 = \text{id}$,
- (ii) $\Theta_t(\text{c.e.}^*(D)) \subset a(D)$ pour tout $t > 0$.

L'existence de Θ est prouvée dans [3] (Lemme 5.2) quand $a(D)$ est remplacé par l'espace $P(D)$ des pseudo-arcs contenus dans D . La démonstration n'utilise aucune propriété particulière au pseudo-arc et s'applique d'une façon générale lorsque $P(D)$ est remplacé par l'espace $K(D)$ des sous-continus de D .

homéomorphes à un élément fixé K de $\text{c.e.}^*(D)$ (il suffit de remplacer, dans la démonstration du Lemme 5.1 de [3], le pseudo-arc P_0 par une copie K_0 de K contenant les deux points a et b).

3.2. Lemme. *Pour toute surface sans bord M , $a(M)$ est un rétracte absolu de voisinage qui a le type d'homotopie de M .*

Démonstration. Puisque $\text{c.e.}^*(D)$ est un rétracte absolu de voisinage [3, Lemme 4.1], l'existence de l'homotopie Θ du Lemme 3.1 implique que $a(D)$ en est un aussi (utiliser le Théorème 6.3, pp. 139–140, de [6]). Puisque $a(M)$ est localement homéomorphe à $a(D)$, c'est aussi un rétracte absolu de voisinage. Pour voir qu'il a le type d'homotopie de M , il suffit de remarquer que la démonstration due Lemme 7.1 de [3], qui prouve le résultat analogue pour l'espace $P(M)$ des pseudo-arcs de M , s'applique sans changement à $a(M)$.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $a(D)$ est homéomorphe à Σ^∞ . Puisque c'est un rétracte absolu d'après le Lemme 3.2 et qu'il appartient à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ [7], il suffit donc de montrer qu'il vérifie les conditions (C.1) et (C.2) du Lemme 2.1.

3.3. Lemme. *Le couple $(\text{c.e.}_v(D), a(D))$ vérifie l'hypothèse (H).*

Démonstration. Que $\text{c.e.}_v(D)$ soit homéomorphe à l^2 résulte du Lemme 6.3 de [3] et du fait que, d'après le Lemme 5.2 de [3], tout sous-ensemble de $\text{c.e.}^*(D)$ contenant $P(D)$ a le type d'homotopie de $\text{c.e.}^*(D)$, donc est contractile (d'après les Lemmes 3.3 et 7.1 de [3]). Pour l'homotopie h demandée dans l'hypothèse (H), il suffit de prendre la restriction à $\text{c.e.}_v(D)$ de l'homotopie Θ du Lemme 3.1.

D'après le Lemme 2.3, la condition (C.1) pour $a(D)$ résultera de l'affirmation suivante qui sera prouvée au §5.

Affirmation 1. Le couple $(\text{c.e.}_v(D), a(D))$ vérifie la condition (C.1').

Pour étudier la condition (C.2), nous avons besoin d'une définition. Soit $\varepsilon > 0$; un arc J contenu dans un espace métrique X est dit ε -sinueux si, quels que soient les points distincts p et q de J , il existe dans J des points r et s entre p et q , tels que r soit entre p et s et que $d(p, s) < \varepsilon$ et $d(q, r) < \varepsilon$. Nous noterons Z_ε l'ensemble des arcs contenus dans D qui ne sont pas ε -sinueux. Il est connu que Z_ε est fermé dans $a(D)$ (voir la démonstration de (19.3) de [9]).

Affirmation 2. Pour tout $\varepsilon > 0$, Z_ε est un Z -ensemble dans $a(D)$.

Cette affirmation sera prouvée au §6. Puisque, évidemment, $a(D) = \bigcup_n Z_{1/n}$, elle implique, d'après le Lemme 2.2 que $a(D)$ vérifie la condition (C.2). Sa démonstration achèvera donc de prouver le Théorème 1.1 quand le bord de M est vide.

4. DEUX CONSTRUCTIONS AUXILIAIRES

Nous construirons aux Lemmes 4.1 et 4.2 deux fonctions dont nous avons besoin pour prouver l'affirmation 1. Commençons par quelques définitions. Si J est un arc dans $\mathbb{R}^2$ et $\omega: [a, b] \rightarrow J$ une paramétrisation (biunivoque) de J , nous dirons que ω est une paramétrisation C^1 si ω est continuellement dérivable et si $\omega'(t) \neq 0$ pour tout t (au point a (resp. b), $\omega'(t)$ désigne la dérivée à droite (resp. gauche)). Nous dirons que ω est une paramétrisation

C^1 par morceaux s'il existe des points $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tels que la restriction de ω à $[t_i, t_{i+1}]$ ($0 \leq i < n$) soit une paramétrisation C^1 pour tout i (en un point t_i avec $0 < i < n$, ω a donc des dérivées à gauche et à droite non nulles).

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Nous noterons $A(K)$ l'ensemble des points x de K qui ont dans K un voisinage J qui est un arc contenant x dans son intérieur (donc, si K est un arc d'extrémités y, z , $A(K) = K \setminus \{y, z\}$). Nous noterons $R(K)$ le sous-ensemble de $A(K)$ formé des points x ayant dans K un voisinage J qui est un arc admettant une paramétrisation C^1 par morceaux, et nous noterons $V(K)$ le sous-ensemble de $R(K)$ formé des points x tels qu'aucun voisinage J de x dans K homéomorphe à un arc n'admette une paramétrisation C^1 (donc, si $x \in V(K)$, il y a un voisinage J de x dans K qui est un arc admettant une paramétrisation C^1 par morceaux $\omega: [a, b] \rightarrow J$; si t_0 est le point de $]a, b[$ tel que $\omega(t_0) = x$, ω a en t_0 des dérivées à gauche et à droite non nulles et distinctes). Enfin, nous poserons $N(K) = A(K) \setminus R(K)$. Il est clair que, si f est un difféomorphisme défini sur un voisinage de K et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et si $K' = f(K)$, alors $A(K') = f(A(K))$, $R(K') = f(R(K))$, $V(K') = f(V(K))$ et $N(K') = f(N(K))$; c'est cette remarque évidente qui nous permettra de distinguer les ensembles dans la démonstration de l'affirmation 1.

Posons $E = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \subset S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, $E^+ = [0, 1] \times [-1, 1]$ et $E^- = [-1, 0] \times [-1, 1]$. Soient $\text{c.e.}_v(E) = \text{c.e.}_v(S^2) \cap C(E)$ et $\text{c.e.}_v(E^+) = \text{c.e.}_v(S^2) \cap C(E^+)$.

4.1. Lemme. Soient X un espace métrique et F un sous-ensemble de X de type $F_{\sigma\delta}$. Alors, il existe une fonction continue $\Gamma: X \rightarrow \text{c.e.}_v(E^+)$ vérifiant

- (i) si x appartient à F , $\Gamma(x)$ est un arc,
- (ii) si x n'appartient pas à F , $\Gamma(x)$ n'est pas localement connexe,
- (iii) pour tout x dans X , $A(\Gamma(x)) = R(\Gamma(x))$.

Démonstration. La démonstration qui suit est une adaptation d'un argument de Mazurkiewicz [8]. Supposons la distance d de X bornée par 1, et soit $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^i$, où les F_k^i sont des fermés de X vérifiant $F_k^i \subset F_{k+1}^i$ quels que soient i et k . Pour x dans X , posons

$$r_k^i(x) = 2^{-i} + 2^{-(i+2k+1)} d(x, F_k^i), \quad s_k^i(x) = 2^{-i} + 2^{-(i+2k)} d(x, F_k^i).$$

Alors

- (1) si $x \in F_k^i$, $r_k^i(x) = 2^{-i} = s_k^i(x)$,
- (2) si $x \notin F_k^i$, $2^{-i} \leq s_{k+1}^i(x) < r_k^i(x) < s_k^i(x) \leq 2^{-i} + 2^{-(i+2k)} < 2^{-(i-1)}$.

Il en résulte que les intervalles $]r_k^i(x), s_k^i(x)[$ sont, pour x fixé, deux à deux disjoints. De plus, pour i fixé, un point x appartient à $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^i$ si, et seulement si, seul un nombre fini d'intervalles $]r_k^i(x), s_k^i(x)[$, $k \geq 1$, sont non vides. Pour x dans X , définissons une fonction (non continue) $g_x: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par

$$g_x(0) = 1,$$

$$g_x(t) = 1 - 2^{-(i-1)} \quad \text{pour } 2^{-i} < t \leq 2^{-(i-1)} \quad \text{et} \quad t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty}]r_k^i(x), s_k^i(x)[,$$

$$g_x(t) = 1 - 2^{-(i-1)} + 2^{-i} \sin \left[\frac{\pi(t - r_k^i(x))}{s_k^i(x) - r_k^i(x)} \right] \quad \text{si } t \in]r_k^i(x), s_k^i(x)[.$$

Soit $K_1(x) = \{(t, g_x(t)) | 0 \leq t \leq 1\}$ le graphe de g_x , et soit $K_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1/2^i\} \times [1 - 2^{-(i-1)}, 1 - 2^{-i}]$. Posons $\Gamma(x) = K_1(x) \cup K_2$. Il est facile de vérifier que Γ est continue et vérifie les conditions (i), (ii) et (iii).

Nous regarderons le cube de Hilbert comme le produit $Q = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, où $I_n = [0, 1]$ pour tout n . Pour $q = (q_n)$ dans Q , nous noterons $M_0(q)$ (resp. $M_1(q)$) l'ensemble des indices n tels que $q_n = 0$ (resp. $q_n = 1$).

4.2. Lemme. *Il existe une fonction continue $\Delta: Q \rightarrow C(E^+)$ vérifiant*

- (i) $\Delta(q)$ est un arc si, et seulement si, $M_1(q) = \emptyset$,
- (ii) si $M_1(q) \neq \emptyset$, $\Delta(q)$ sépare S^2 ,
- (iii) si q et q' sont deux points de Q tels qu'il existe des difféomorphismes f et f' définis sur un voisinage de E^+ et vérifiant $f(\Delta(q)) = f'(\Delta(q'))$, alors $M_0(q) = M_0(q')$ et $M_1(q) = M_1(q')$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous identifierons I au segment $[0, 1] \times \{0\}$ de E^+ et le réel a de I au point $(a, 0)$. Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de I convergeant vers zéro et vérifiant $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ pour tout n . Choisissons des nombres $\eta_n > 0$ de façon que $a_{n+1} + \eta_{n+1} < a_n - \eta_n$ pour tout n et que $a_1 + \eta_1 < 1$. Posons

$$J_n = \left\{ \left(t, (t - a_n) \sin \left[\frac{\pi \eta_n}{t - a_n} \right] \right) / a_n - \eta_n \leq t \leq a_n + \eta_n \right\} \quad (n \geq 1).$$

(Nous convenons que $(t - a_n) \sin[\pi \eta_n / (t - a_n)] = 0$ si $t = a_n$.) Soit

$$J_0 = \left(I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n - \eta_n, a_n + \eta_n[\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right).$$

Il est facile de voir que J_0 est un arc vérifiant

- (1) $N(J_0) = \{a_n / n = 1, 2, \dots\}$,
- (2) $V(J_0) = \{a_n \pm \eta_n / n = 1, 2, \dots\}$.

Pour $n \geq 1$, prenons des nombres b_n, c_n vérifiant $a_{n+1} + \eta_{n+1} < b_n < c_n < a_n + \eta_n$. Soient d_n le milieu du segment $[b_n, c_n]$ et e_n le milieu du segment $[b_n, d_n]$. Soient L_n le demi-cercle de diamètre $[b_n, c_n]$ situé dans le demi-plan supérieur. Pour $0 \leq \theta \leq 1$, soit $r_n(\theta)$ le point de L_n tel que l'angle $\widehat{c_n d_n r_n(\theta)}$ soit égal à $\theta \pi$, et soit $L_n(\theta)$ l'arc de L_n d'extrémités c_n et $r_n(\theta)$; nous avons donc $r_n(0) = c_n$, $r_n(1) = b_n$, et $r_n(\theta)$ dépend continuellement de θ . Soit $R_n(\theta)$ le cercle de centre e_n passant par $r_n(\theta)$. Le segment $[d_n, c_n]$ contient exactement un des deux points d'intersection de $R_n(\theta)$ avec la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$; soit $t_n(\theta)$ ce point. Les points $r_n(\theta)$ et $t_n(\theta)$ décomposent le cercle $R_n(\theta)$ en deux arcs (dont l'un est dégénéré si $\theta = 0$); soit $T_n(\theta)$ celui de ces deux arcs qui est entièrement contenu dans le demi-plan supérieur (si $\theta = 0$, $T_n(\theta) = \{c_n\}$; si $\theta = 1$, $T_n(\theta)$ est un demi-cercle de diamètre $[b_n, d_n]$). Posons enfin, pour $0 \leq \theta \leq 1$,

$$Y_n(\theta) = [b_n, t_n(\theta)] \cup T_n(\theta) \cup L_n(\theta).$$

Si $\theta = 0$, $Y_n(\theta)$ est le segment $[b_n, c_n]$, si $0 < \theta < 1$, $Y_n(\theta)$ est un arc, et si $\theta = 1$, $Y_n(\theta)$ est un continu séparant S^2 . Nous pouvons maintenant définir

Δ par

$$\Delta(q) = \left(J_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}]b_n, c_n[\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n(q_n) \right).$$

Il est facile de voir que $\Delta(q)$ est un continu contenu dans E^+ , vérifiant les conditions (i) et (ii) et dépendant continûment de q . Pour prouver la condition (iii), soient $q = (q_n)$ et $q' = (q'_n)$ deux points de Q pour lesquels il existe des difféomorphismes f et f' définis sur un voisinage de E^+ vérifiant $f(\Delta(q)) = f'(\Delta(q')) = K$. D'après (1) et la définition des ensembles $Y_n(\theta)$, il est facile de vérifier que

$$(3) \quad N(\Delta(q)) = N(\Delta(q')) = \{a_n/n = 1, 2, \dots\}.$$

Comme nous l'avons remarqué au début de cette section, $N(K) = f(N(\Delta(q))) = f'(N(\Delta(q')))$; comme de plus $\Delta(q) \setminus \{a_n\}$ (resp. $\Delta(q') \setminus \{a_n\}$) a deux composantes, dont l'une contient $n-1$ points de $N(\Delta(q))$ (resp. $N(\Delta(q'))$), tandis que l'autre en contient une infinité, nous avons nécessairement $f(a_n) = f'(a_n)$ pour tout n .

L'ensemble $\Delta(q) \setminus \{a_n, a_{n+1}\}$ a trois composantes, dont une seule, soit $E_n(q)$, a pour frontière (dans $\Delta(q)$) l'ensemble $\{a_n, a_{n+1}\}$. Puisque $f(a_n) = f'(a_n)$ et $f(a_{n+1}) = f'(a_{n+1})$, nous avons $f(E_n(q)) = f'(E_n(q'))$. Si $q_n = 1$, la fermeture de $E_n(q)$ sépare S^2 , tandis que, si $0 \leq q_n < 1$, cette fermeture est un arc; l'égalité $M_1(q) = M_1(q')$ en résulte. Si $q_n = 0$, $E_n(q)$ contient, d'après (2) et la définition de $Y_n(\theta)$, exactement deux points de $V(\Delta(q))$ ($a_{n+1} + \eta_{n+1}$ et $a_n - \eta_n$), tandis que, si $0 < q_n < 1$, $E_n(q)$ contient cinq points de $V(\Delta(q))$ ($a_{n+1} + \eta_{n+1}$, $t_n(q_n)$, $r_n(q_n)$, c_n et $a_n - \eta_n$). Puisque $f(V(\Delta(q))) = V(K) = f'(V(\Delta(q')))$, l'égalité $M_0(q) = M_0(q')$ en résulte, d'où (iii).

Pour la démonstration de l'affirmation 1, nous combinerons les deux constructions précédentes comme suit. Soient X un espace métrique, F un sous-ensemble de X de type $F_{\sigma\delta}$, Γ la fonction associée à X et F par le Lemme 4.1, φ une fonction continue de X dans Q , et Δ la fonction du Lemme 4.2. Posons, pour x dans X ,

$$\Lambda_\varphi(x) = \Gamma^-(x) \cup \Delta(\varphi(x)),$$

où $\Gamma^-(x)$ est le sous-ensemble de E^- obtenu en translatant $\Gamma(x)$ d'une unité vers la gauche. Il est clair que $\Gamma^-(x)$ et $\Delta(\varphi(x))$ ont en commun le seul point 0 de I , donc $\Lambda_\varphi(x)$ est un continu contenu dans E . La fonction $\Lambda_\varphi: X \rightarrow C(E)$ ainsi obtenue est continue puisque Γ , Δ et φ le sont.

4.3. Lemme. *La fonction Λ_φ possède les propriétés suivantes:*

(P1) $\Lambda_\varphi(x) \in \text{c.e.v}(E)$ si $M_1(\varphi(x)) = \emptyset$, $\Lambda_\varphi(x)$ sépare S^2 si $M_1(\varphi(x)) \neq \emptyset$,

(P2) $\Lambda_\varphi(x)$ est un arc si, et seulement si, x appartient à F et $M_1(\varphi(x)) = \emptyset$,

(P3) Si x et x' sont deux points de X tels qu'il existe des difféomorphismes f et f' définis sur un voisinage de E et vérifiant $f(\Lambda_\varphi(x)) = f'(\Lambda_\varphi(x'))$, alors $M_0(\varphi(x)) = M_0(\varphi(x'))$ et $M_1(\varphi(x)) = M_1(\varphi(x'))$.

Démonstration. (P1) et (P2) sont des conséquences immédiates des propriétés (i) et (ii) des Lemmes 4.1 et 4.2. Pour vérifier (P3), soient x, x' deux points de X et f, f' des difféomorphismes définis sur un voisinage de E tels que $f(\Lambda_\varphi(x)) = f'(\Lambda_\varphi(x')) = K$. A l'aide de (iii) du Lemme 4.1 et de la relation (3) dans la démonstration du Lemme 4.2, il est facile de vérifier que

$N(\Lambda_\varphi(x)) = \{0\} \cup \{a_n/n = 1, 2, \dots\} = N(\Lambda_\varphi(x'))$. En utilisant, comme dans la démonstration du Lemme 4.2, le fait que $f(N(\Lambda_\varphi(x))) = N(K) = f'(N(\Lambda_\varphi(x')))$, il est facile d'en déduire que $f(0) = f'(0)$ et $f(\Delta(\varphi(x))) = f'(\Delta(\varphi(x')))$; la condition (P3) résulte alors de (iii) du Lemme 4.2.

Le lemme suivant permettra d'exploiter la condition (P3).

4.4. Lemme. *Soit X un espace métrique séparable. Il existe un plongement ψ de X dans Q vérifiant,*

- (i) $M_1(\psi(x)) = \emptyset$ quelque soit x ,
- (ii) si x et y sont deux points distincts de X , $M_0(\psi(x)) \neq M_0(\psi(y))$.

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=1}^\infty$ une base dénombrable de X . L'ensemble des couples $\mathcal{E} = \{U_i, U_j\}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ vérifiant $\overline{U_i} \subset U_j$ est dénombrable; soit $\mathcal{E}_n = \{U_{i_n}, U_{j_n}\}$, $n \geq 1$, une énumération de ces couples. Pour tout n , soit ψ_n une fonction continue de X dans $[0, 1/2]$ telle que $\psi_n(x) = 0$ si $x \in \overline{U_{i_n}}$ et $\psi_n(x) = 1/2$ si $x \in X \setminus U_{j_n}$. Alors, $\psi = (\psi_n)$ est un plongement de X dans Q vérifiant (i). De plus, si $x \neq y$, il y a un n tel que, si $\mathcal{E}_n = \{U_{i_n}, U_{j_n}\}$, x appartienne à U_{i_n} et y à $X \setminus U_{j_n}$, alors n appartient à $M_0(\psi(x))$, mais pas à $M_0(\psi(y))$, d'où (ii).

5. DÉMONSTRATION DE L'AFFIRMATION 1

Soit U un ouvert de $\text{c.e.v.}(D)$, F un sous-ensemble de U de type $F_{\sigma\delta}$ et $\mathcal{U} = \{U_\alpha/\alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de U . Puisque $C(D)$ est ouvert dans $C(S^2)$, nous pouvons trouver, pour tout α dans A , un ouvert U'_α de $C(S^2)$ contenu dans $C(D)$ tel que $U'_\alpha \cap \text{c.e.v.}(S^2) = U_\alpha$. Soient $U' = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$ et $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha/\alpha \in A\}$. Puisque $\text{c.e.v.}(D)$ est topologiquement complet et U ouvert dans $\text{c.e.v.}(D)$, U est un G_δ absolu, donc $U' \setminus U$ est un F_σ ; soit $U' \setminus U = \bigcup_{n=1}^\infty P_n$, où P_n est fermé dans U' . Pour $n \geq 1$, soit σ_n une fonction continue de U' dans $[0, 1]$ telle que $\sigma_n^{-1}(1) = P_n$. Conformément au Lemme 4.4, soit $\psi = (\psi_n)$ un plongement de U' dans Q tel que $M_1(\psi(C)) = \emptyset$ pour tout C dans U' et $M_0(\psi(C)) \neq M_0(\psi(C'))$ si $C \neq C'$. Soit $\varphi = (\varphi_n)$ l'application de U' dans Q définie par $\varphi_{2n} = \sigma_n$ et $\varphi_{2n+1} = \psi_n$ pour tout $n \geq 1$. D'après le choix des σ_n et de ψ , il est facile de voir que φ vérifie

- (1) $M_1(\varphi(C)) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $C \in U' \setminus U$,
- (2) $M_0(\varphi(C)) \neq M_0(\varphi(C'))$ si $C \neq C'$.

Puisque F est un $F_{\sigma\delta}$ dans l'espace topologiquement complet U , c'est un $F_{\sigma\delta}$ absolu, donc un $F_{\sigma\delta}$ dans U' ; soit $\Gamma: U' \rightarrow C(E^+)$ une fonction vérifiant les conditions du Lemme 4.1 pour $X = U'$ et F . Aux fonctions Γ et φ ainsi construites, associons, comme à la section précédente, la fonction $\Lambda_\varphi: U' \rightarrow C(E)$ définie par $\Lambda_\varphi(C) = \Gamma^-(C) \cup \Delta(\varphi(C))$.

Cette fonction vérifie les conditions (P1), (P2) et (P3) du Lemme 4.3.

Soient p_0 , f_C , F et Π comme il est expliqué au §1. Nous construirons le plongement g cherché sous la forme $g(C) = f_C \circ \mu_C(\Lambda_\varphi(C))$, où μ_C est un plongement de E dans D . Cette construction se fera en deux étapes.

Il est facile de construire une fonction continue $\varepsilon: U' \rightarrow]0, 1]$ vérifiant

- (3) pour tout C dans U' , $B_\rho(C, \varepsilon(C))$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}'$.
- Nous pouvons supposer que ε vérifie aussi
- (4) $\varepsilon(C) < \rho(C, C(S^2) \setminus U')$ pour tout C dans U' .

Pour C dans U , soit $\beta(C)$ la borne inférieure des nombres $0 < t \leq 1$ vérifiant

$$(5) \quad \rho(C, \Pi(C, s)) < \frac{1}{2}\varepsilon(C) \text{ pour tout } s \in [t, 1].$$

La continuité de Π entraîne que $\beta(C) < 1$ pour tout C dans U , et que la fonction β ainsi définie est semi-continue supérieurement. Nous pouvons donc [4, 4.3, p. 171] trouver une fonction continue $\gamma: U \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$(6) \quad \beta(C) < \gamma(C) < 1 \text{ pour tout } C \text{ dans } U.$$

Il est clair que tout nombre t dans $] \beta(C), 1[$ vérifie (5); il résulte donc de (6) que la fonction $h: U \rightarrow (C(S^2))$, définie par $h(C) = \Pi(C, \gamma(C))$ vérifie

$$(7) \quad \rho(C, h(C)) < \frac{1}{2}\varepsilon(C).$$

Munissons D de coordonnées polaires (r, θ) . Pour tout couple de nombres (a, b) vérifiant $0 < a < 1$ et $0 \leq b \leq \frac{1}{2} \min(a, 1-a)$, définissons une fonction $\mu(a, b)$ de E dans D par

$$\mu(a, b)(u, v) = (a + b(u + \frac{1}{2}v), \pi u), \quad -1 \leq u, v \leq 1.$$

Si $b = 0$, $\mu(a, b)$ envoie E sur $S(a)$, tandis que si $b > 0$, $\mu(a, b)$ se prolonge en un difféomorphisme d'un voisinage de E dans D ; évidemment, μ dépend continuellement de a et b . Soient d_0 la distance euclidienne sur D , et ρ_0 la distance de Hausdorff associée à d_0 . Nous avons alors, quels que soient a et b ($0 < a < 1$ et $0 \leq b \leq \frac{1}{2} \min(a, 1-a)$)

$$(8) \quad \rho_0(S(a), \mu(a, b)(K)) \leq \frac{2}{3}b \text{ pour tout sous-continu } K \text{ de } E \text{ rencontrant à la fois } \{-1\} \times [-1, 1] \text{ et } \{1\} \times [-1, 1].$$

Pour voir cela, il suffit de remarquer que toute demi-droite L d'origine 0 rencontre à la fois $S(a)$ et $\mu(a, b)(K)$, et que tout point (r, θ) de $\mu(a, b)(E)$ vérifie $a - \frac{3}{2}b \leq r \leq a + \frac{3}{2}b$.

Pour C dans U , soit $\eta(C)$ la borne supérieure des nombres $t \in [0, \frac{1}{2} \min(\gamma(C), 1 - \gamma(C))]$ vérifiant

$$(9) \quad \rho(h(C), f_C \circ \mu(\gamma(C), s)(\Lambda_\varphi(C))) < \min(\frac{1}{2}\varepsilon(C), 1 - \gamma(C)) \text{ pour tout } s \in [0, t].$$

Puisque $h(C) = \Pi(C, \gamma(C)) = f_C(S(\gamma(C)))$ et que $\Lambda_\varphi(C)$ rencontre à la fois $\{-1\} \times [-1, 1]$ et $\{1\} \times [-1, 1]$, il résulte de (8) que $\eta(C) > 0$. De plus, en utilisant la continuité des fonctions h , F , μ , γ et Λ_φ , il est facile de voir que la fonction η est semi-continue inférieurement. Nous pouvons donc trouver [4, 4.3, p. 171] une fonction continue $\xi: U \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$(10) \quad 0 < \xi(C) < \eta(C) \text{ pour tout } C \text{ dans } U.$$

Posons alors $\mu_C = \mu(\gamma(C), \xi(C))$ et $g(C) = f_C \circ \mu_C(\Lambda_\varphi(C))$.

La fonction g est alors continue. D'après (1) et la propriété (P1), g envoie U dans $\text{c.e.}_v(S^2)$. Remarquant que la condition (9) est vérifiée pour tout nombre $t \in [0, \eta(C)[$ nous constatons par (10) que, pour tout C dans U ,

$$(11) \quad \rho(h(C), g(C)) < \min(\frac{1}{2}\varepsilon(C), 1 - \gamma(C)), \text{ d'où, d'après (7),}$$

$$(12) \quad \rho(C, g(C)) < \varepsilon(C).$$

D'après (3), il y a, pour tout C dans U , un α tel que U'_α contienne à la fois C et $g(C)$; alors $g(C)$ appartient à $U'_\alpha \cap \text{c.e.}_v(S^2) = U_\alpha$; ceci montre que g envoie U dans lui-même et est $\mathcal{U}$ -proche de id_U . D'après (1) et la propriété (P2), $g(C)$ est dans $a(D)$ si, et seulement si, C appartient à F . Il ne reste plus qu'à vérifier que g est un Z -plongement de U dans U .

Soient C et C' deux éléments distincts de U . D'après (2), $M_0(\varphi(C)) \neq M_0(\varphi(C'))$. Puisque $\xi(C), \xi(C') > 0$, $f_C \circ \mu_C$ et $f_{C'} \circ \mu_{C'}$ se prolongent en des difféomorphismes sur un voisinage de E ; d'après la propriété (P3), il en résulte que $g(C) \neq g(C')$, donc g est injective.

Pour montrer que g est un plongement fermé de U dans U , il suffit de vérifier que si $\{C_l\}_{l=1}^\infty$ est une suite d'éléments de U telle que la suite $\{g(C_l)\}$ converge vers un élément C de U , il existe un C' dans U (unique puisque g est injective) tel que $g(C') = C$ et, qu'en outre, il y a une sous-suite de $\{C_l\}$ qui converge vers C' . Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{C_l\}$ converge vers un élément C_0 de $C(S^2)$. Il suffit de montrer que C_0 appartient à U , car alors $\{g(C_l)\}$ tend vers $g(C_0)$, donc $C' = C_0$ est l'élément cherché. Supposons que C_0 n'appartienne pas à U ; alors C_0 appartient à $\bar{U}'$. Distinguons deux cas.

Cas I. C_0 appartient à la frontière de U' . Alors, d'après (4), $\{\varepsilon(C_l)\}$ tend vers zéro, donc, d'après (12), les suites $\{C_l\}$ et $\{g(C_l)\}$ ont la même limite $C_0 = C$, ce qui est absurde car C est dans U , mais pas C_0 .

Cas II. C_0 appartient à $U' \setminus U = U' \setminus \text{c.e.v.}(S^2)$; ou bien l'intérieur de C_0 n'est pas vide, ou bien C_0 sépare S^2 . Pour simplifier les notations, nous poserons, pour $l = 1, 2, \dots$, $f_l = f_{C_l}$, $\gamma_l = \gamma(C_l)$, $\xi_l = \xi(C_l)$ et $\mu_l = \mu_{C_l}$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que les suites $\{\gamma_l\}$ et $\{\xi_l\}$ convergent vers γ_0 et ξ_0 respectivement; alors $0 \leq \gamma_0 \leq 1$ et $0 \leq \xi_0 \leq \frac{1}{2} \min(\gamma_0, 1 - \gamma_0)$. Soit H la composante de $S^2 \setminus C_0$ qui contient $S^2 \setminus \bar{D}(S^2 \setminus \bar{D} \subset S^2 \setminus C_0$ car U' est contenu dans $C(D)$), et soit f_0 la représentation conforme de D sur H vérifiant $f_0(0) = p_0$ et $f'_0(0) > 0$. Alors [3, Lemmes 2.1 et 2.2], la suite $\{f_l\}_{l=1}^\infty$ converge vers f_0 uniformément sur tout compact de D . Nous avons $\gamma_0 > 0$ sans quoi, puisque $f_0(0) \notin \bar{D}$ et que $\{f_l\}$ converge uniformément vers f_0 sur tout compact, nous aurions $h(C_l) = f_l(S(\gamma_l)) \subset S^2 \setminus \bar{D}$ pour l assez grand, contrairement à (7) et (4) (rappelez que $U' \subset C(D)$). Il y a trois possibilités.

(a) $0 < \gamma_0 < 1$ et $\xi_0 > 0$. Alors $\{\Lambda_\varphi(C_l)\}$ tend vers $\Lambda_\varphi(C_0)$ et $\{\mu_l\}$ converge uniformément vers $\mu(\gamma_0, \xi_0)$ sur E . Puisque $\mu(\gamma_0, \xi_0)(E)$ est contenu dans un compact de D et que la suite $\{f_l\}$ converge uniformément vers f_0 sur tout compact, $g(C_l) = f_l \circ \mu_l(\Lambda_\varphi(C_l))$ converge vers $C = f_0 \circ \mu(\gamma_0, \xi_0)(\Lambda_\varphi(C_0))$. Mais ce dernier ensemble est homéomorphe à $\lambda_\varphi(C_0)$ puisque $\xi_0 > 0$, donc sépare S^2 d'après (1) et la propriété (P1). Ceci contredit l'hypothèse que C appartient à $U \subset \text{c.e.v.}(S^2)$.

(b) $0 < \gamma_0 < 1$ et $\xi_0 = 0$. Alors $\{\mu_l(\Lambda_\varphi(C_l))\}$ converge vers $S(\gamma_0)$ (voir (8)). Par suite, $\{g(C_l)\}$ converge vers $f_0(S(\gamma_0))$, qui est une courbe simple fermée, donc n'appartient pas à $\text{c.e.v.}(S^2)$, une contradiction.

(c) $\gamma_0 = 1$. D'après (11), $\rho(h(C_l), g(C_l))$ tend vers zéro, donc C est aussi la limite de la suite $h(C_l) = f_l(S(\gamma_l))$. Pour tout l , la courbe simple fermée $f_l(S(\gamma_l))$ sépare S^2 entre p_0 et C_l , donc la limite C de $\{f_l(S(\gamma_l))\}$ sépare S^2 entre p_0 et tout point p de $C_0 \setminus C$ (sinon, $S^2 \setminus C$ contiendrait un arc L reliant p_0 à p , ainsi qu'un disque fermé B de centre p . Pour l assez grand, $f_l(S(\gamma_l)) \cap (L \cup B) = \emptyset$. Puisque p appartient à la limite de $\{C_l\}$, $B \cap C_l = \emptyset$ pour tout l assez grand, donc $L \cup B$ est un continu reliant p_0 à C_l , d'où $(L \cup B) \cap f_l(S(\gamma_l)) \neq \emptyset$: contradiction); puisque C ne sépare pas S^2 , il contient

donc C_0 . Puisque C a un intérieur vide, C_0 aussi, donc C_0 sépare S^2 . Soit K la réunion de C_0 et des composantes de $S^2 \setminus C_0$ contenues dans D . Puisque C a un intérieur vide, il ne contient pas K ; mais alors, puisqu'il contient C_0 , il sépare S^2 entre $S^2 \setminus D$ et $K \setminus C$, ce qui est impossible.

Ceci achève de prouver que g est un plongement fermé de U dans U .

Montrons que $g(U)$ est un Z -ensemble dans U . Soit $J = [-1, 1] \times \{0\} \subset E$. En raisonnant comme dans la construction de g , nous constatons que id_U peut être approximée arbitrairement par des fonctions k du type $k(C) = f_C \circ \mu(\gamma'(C), \xi'(C))(J)$, où γ' , ξ' sont des fonctions continues de U dans $]0, 1[$ vérifiant $\xi'(C) < \frac{1}{2} \min(\gamma'(C), 1 - \gamma'(C))$. Soient C, C' deux éléments de U . Alors, $f_C \circ \mu(\gamma'(C), \xi'(C))|J$ est une paramétrisation C^1 de l'arc $k(C)$. D'autre part, d'après la démonstration de la propriété (P3) au Lemme 4.3, $N(\Lambda_\phi(C'))$ est un ensemble infini, donc aussi $N(g(C')) = N(f_{C'} \circ \mu_{C'}(\Lambda_\phi(C')))$ puisque $f_{C'} \circ \mu_{C'}$, se prolonge en un difféomorphisme sur un voisinage de E . Par suite, $k(C) \neq g(C')$, ce qui montre que $k(U) \subset U \setminus g(U)$, donc que $g(U)$ est un Z -ensemble.

6. DÉMONSTRATION DE L'AFFIRMATION 2

Nous avons besoin d'une construction auxiliaire. Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels ≥ 0 .

6.1. Lemme. *Il existe un plongement $\omega: \mathbb{R}^+ \rightarrow D$ vérifiant*

- (i) *l'arc $\omega([t, t+1])$ tend vers S^1 quand t tend vers $+\infty$,*
- (ii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $M(\varepsilon)$ tel que $\omega([t, t+1])$ soit ε -sinueux pour tout $t \geq M(\varepsilon)$.*

Démonstration. Munissons D de coordonnées polaires (r, θ) et de la distance euclidienne. Pour $n \geq 1$, soit $a_n = (1 - 1/2^n, 0)$ et soit A_n l'anneau $A_n = \{(r, \theta) / 1 - 1/2^n \leq \theta \leq 1 - 1/2^{n+1}\}$. Soit $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, et soit ∂I^2 le bord de I^2 . Pour $n \geq 1$, soit h_n l'application de I^2 sur A_n définie par

$$h_n(u, v) = \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{u}{2^{n+1}}, 2\pi v\right), \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

Soient $a = (0, 0)$, $a' = (1, 0)$ et $b = (\frac{1}{2}, 1)$; alors $h_n(a) = a_n$ et $h_n(a') = a_{n+1}$, $n \geq 1$. Si J est un arc contenu dans I^2 tel que $J \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$, alors $h_n(J)$ est un arc d'extrémités a_n et a_{n+1} contenu dans A_n et ayant seulement a_n et a_{n+1} en commun avec le bord de A_n . Nous allons montrer qu'il existe, pour tout $n \geq 1$, un arc J_n dans I^2 vérifiant

- (1) $J_n \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$,
- (2) l'arc $h_n(J_n)$ est 2^{-n} -sinueux.

Supposons les J_n construits. Soit $T_n = h_n(J_n)$, et soit ω_n un homéomorphisme de $[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$ sur T_n tel que $\omega_n(\frac{n-1}{2}) = a_n$ et $\omega_n(\frac{n}{2}) = a_{n+1}$. Définissons alors ω par $\omega|[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}] = \omega_n$ pour tout $n \geq 1$. Il est clair que ω est un plongement. Soit, en coordonnées polaires, $\omega(t) = (r(t), \theta(t))$; choisissons θ de façon que θ soit continue et que $\theta(0) = 0$. Il est alors facile de voir, par récurrence sur n que, si $\frac{n-1}{2} \leq t \leq \frac{n}{2}$ et si $\omega(t) = h_n(u, v)$, alors $\theta(t) = 2\pi v$.

En particulier, nous avons

- (3) $0 \leq \theta(t) \leq 2\pi$ pour tout t ,
- (4) $\theta(a_n) = 0$ pour tout n ,
- (5) si $\omega(t_n) = h_n(b)$, alors $\theta(t_n) = 2\pi$.

Etant donné t dans $\mathbb{R}^+$, soit n tel que $\frac{n-1}{2} \leq t < \frac{n}{2}$. Alors, $\omega([t, t+1])$ est contenu dans $T_n \cup T_{n+1} \cup T_{n+2}$ et contient T_{n+1} . Pour s dans $[t, t+1]$, nous avons donc $r(s) \geq 1 - 1/2^n$. De plus, d'après (4), (5) et la continuité de θ , toute demi-droite d'origine 0 rencontre T_{n+1} , donc aussi $\omega([t, t+1])$. Il est facile de déduire de tout cela que $\rho(S^1, \omega([t, t+1])) \leq 2^{-n}$ si $\frac{n-1}{2} \leq t < \frac{n}{2}$; la condition (i) en résulte.

Si p et q sont deux points de $\omega(\mathbb{R}^+)$, nous noterons $p \leq q$ si $p = \omega(t)$ et $q = \omega(t')$ avec $t \leq t'$. Pour vérifier la condition (ii), il suffit de montrer que $\omega([t, t+1])$ est 2^{-n+1} -sinueux si $\frac{n-1}{2} \leq t < \frac{n}{2}$. Soient $p = \omega(s_1)$ et $q = \omega(s_2)$ deux points de $\omega([t, t+1])$ avec $p \leq q$; puisque $\omega([t, t+1])$ est la réunion des trois sous-arcs $\omega([t, t+1]) \cap T_{n+k}$, $k = 0, 1, 2$, il y a quatre possibilités.

(a) Il existe un k tel que $\omega([t, t+1]) \cap T_{n+k}$ contienne p et q . D'après (2), nous pouvons trouver des points r, s de $\omega([t, t+1]) \cap T_{n+k}$ tels que $p \leq r \leq s \leq q$ et que $d(p, s) < 1/2^{n+k}$ et $d(q, r) < 1/2^{n+k}$.

(b) p appartient à T_n et q à T_{n+1} . Si $\theta(s_1) \leq \theta(s_2)$, nous pouvons, d'après (4), trouver un point $p' = \omega(s_3)$ tel que $p \leq a_{n+1} \leq p' \leq q$ et $\theta(s_3) = \theta(s_1)$. Puisque $r(s_3) \geq 1 - 1/2^{n+1} \geq r(s_1) \geq 1 - 1/2^n$ nous avons $d(p, p') < 1/2^n$. D'après (2), nous pouvons trouver des points r et s dans T_{n+1} avec $p' \leq r \leq s \leq q$, $d(q, r) < 1/2^{n+1}$ et $d(p', s) < 1/2^{n+1}$, donc $d(p, s) < 1/2^n + 1/2^{n+1} < 1/2^{n-1}$.

Si $\theta(s_1) > \theta(s_2)$, prenons un point $q' = \omega(s_4)$ vérifiant $p \leq q' \leq a_{n+1} \leq q$ et $\theta(s_4) = \theta(s_2)$; alors $d(q, q') < 1/2^n$ et (2) permet de trouver des points r et s dans T_n avec $p \leq r \leq s \leq q'$, $d(p, s) < 1/2^n$ et $d(q', r) < 1/2^n$, donc $d(q, r) < 1/2^{n-1}$.

(c) p appartient à T_{n+1} et q à T_{n+2} . Ce cas se traite comme le précédent.

(d) p appartient à T_n et q à T_{n+2} . En utilisant (3), (4) et (5), nous pouvons trouver des points $p' = \omega(s_3)$ et $q' = \omega(s_4)$ vérifiant $p \leq a_{n+1} \leq p' \leq h_{n+1}(b) \leq q' \leq a_{n+2} \leq q$ et $\theta(s_3) = \theta(s_1)$, $\theta(s_4) = \theta(s_2)$. Alors $d(p, p') < 1/2^n$ et $d(q, q') < 1/2^{n+1}$. D'après (2), il y a des points r et s dans T_{n+1} avec $p' \leq r \leq s \leq q'$ et $d(p', s) < 1/2^{n+1}$, $d(q', r) < 1/2^{n+1}$. Nous avons donc $d(p, s) < 1/2^n + 1/2^{n+1}$ et $d(q, r) < 1/2^n$. Ceci achève de vérifier la condition (ii).

Pour construire J_n , il suffit, d'après la continuité uniforme de h_n , de construire, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, un arc J dans I^2 qui est ε -sinueux et vérifie $J \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$. Soit $P_\varepsilon = I^2 \setminus [\varepsilon/4, 1 - \varepsilon/4] \times [0, 1 - \varepsilon/4]$. Puisque les arcs $\varepsilon/2$ -sinueux sont denses dans $C(\mathbb{R}^2)$ [9, p. 614], nous pouvons trouver un arc $\varepsilon/2$ -sinueux J' contenu dans l'intérieur de P_ε et rencontrant les deux boules ouvertes $B(a, \varepsilon/4)$ et $B(a', \varepsilon/4)$. Soit J'' un arc qui est réunion d'un segment de droite contenu dans $B(a, \varepsilon/4)$ reliant a à J' , d'un sous-arc de J' et d'un segment contenu dans $B(a', \varepsilon/4)$ reliant J' à a' ; alors $J'' \cap \partial I^2 = \{a, a'\}$ et, puisque J'' est contenu dans P_ε , il rencontre la boule $B(b, \varepsilon/4)$. Soit J un arc déduit de J'' en remplaçant un sous-arc K_1 de J'' contenu dans $B(b, \varepsilon/4)$ par un arc K_2 contenu dans $B(b, \varepsilon/4)$ tel que

$K_2 \cap \partial I^2 = \{b\}$. Alors $J \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$ et il est facile de vérifier que J est ε -sinueux.

Démonstration de l'affirmation 2. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour prouver que Z_ε est un Z -ensemble, il faut montrer que, pour toute fonction continue $\alpha: a(D) \rightarrow]0, 1]$, il existe une fonction continue $g: a(D) \rightarrow a(D) \setminus Z_\varepsilon$ vérifiant $\rho(C, g(C)) < \alpha(C)$ pour tout C dans $a(D)$. Il suffit de le faire quand α vérifie

$$(1) \quad \alpha(C) < d(C, S^2 \setminus D) \quad \text{pour tout } C \text{ dans } a(D).$$

Soient p_0, f_C, F et Π comme dans le §1. En raisonnant comme dans la démonstration de l'affirmation 1, nous pouvons construire une fonction continue $\gamma: a(D) \rightarrow]0, 1]$ telle que la fonction $h: a(D) \rightarrow C(S^2)$ définie par $h(C) = \Pi(C, \gamma(C))$ vérifie

$$(2) \quad \rho(C, h(C)) < \frac{1}{2}\alpha(C) \quad \text{pour tout } C \text{ dans } a(D).$$

Pour $0 < s < 1$, soit $R(s)$ l'homéomorphisme radial de $\overline{D}$ sur $\overline{B}(s)$ ($R(s)(z) = s \cdot z$). Pour t dans $\mathbb{R}^+$, soit $\Omega(t) = \omega([t, t+1])$, où ω est le plongement du Lemme 6.1; posons $\Omega(\infty) = S^1$. La fonction Ω ainsi définie, de $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ dans $C(\overline{D})$ est continue d'après (i) du Lemme 6.1. Pour C dans $a(D)$, soit $\zeta(C)$ la borne inférieure des nombres $t \geq 0$ vérifiant simultanément les deux conditions suivantes

$$(3) \quad \rho(h(C), f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(s))) < \frac{1}{2}\alpha(C) \quad \text{pour tout } s \text{ dans } [t, \infty],$$

$$(4) \quad f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(s)) \text{ est } \varepsilon\text{-sinueux} \quad \text{pour tout } s \text{ dans } [t, \infty[.$$

Il résulte du Lemme 6.1 et de la continuité uniforme de f_C sur le disque $\overline{B}(\gamma(C))$ que, pour tout C donné, l'ensemble des t vérifiant ces deux conditions n'est pas vide. Montrons que la fonction ζ est semi-continue supérieurement. Dans le cas contraire, nous pouvons trouver un C_0 dans $a(D)$, un nombre $t_0 > \zeta(C_0)$, et une suite $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ d'éléments de $a(D)$ convergeant vers C_0 et tels que $\zeta(C_n) > t_0$ pour tout $n \geq 1$. Posons, pour $n \geq 0$, $f_n = f_{C_n}$, $\gamma_n = \gamma(C_n)$ et $\zeta_n = \zeta(C_n)$. La continuité des fonctions α, h, γ, F et Ω entraîne que l'ensemble V des couples (C, s) tels que $\rho(h(C), f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(s))) < \frac{1}{2}\alpha(C)$ est ouvert dans $a(D) \times \mathbb{R}^+$. Puisque V contient $\{C_0\} \times [t_0, \infty]$, il contient $\{C_n\} \times [t_0, \infty]$ pour tout $n \geq N_0$ (nous supposons que $N_0 = 1$); alors t_0 vérifie la condition (3) relativement à C_n , donc, puisque $t_0 < \gamma_n$, il ne vérifie pas la condition (4). Nous pouvons donc trouver un nombre $s_n \geq t_0$ tel que l'arc $f_n \circ R(\gamma_n)(\Omega(s_n))$ ne soit pas ε -sinueux. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers $s_0 \in [t_0, \infty]$.

Quand n tend vers l'infini, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ tend vers γ_0 , donc $R(\gamma_n)$ converge vers $R(\gamma_0)$, uniformément sur $\overline{D}$. D'après la continuité de F , $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers f_0 uniformément sur tout compact de D ; puisque $\gamma_n < 1$ pour tout n , il en résulte que la suite $\{f_n \circ R(\gamma_n)\}_{n=1}^\infty$ converge vers $f_0 \circ R(\gamma_0)$ uniformément sur $\overline{D}$. La famille $\{f_n \circ R(\gamma_n)\}_{n=0}^\infty$ est donc uniformément équicontinue sur $\overline{D}$, ce qui entraîne l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout arc δ -sinueux J contenu dans $\overline{D}$, $f_n \circ R(\gamma_n)(J)$ soit ε -sinueux dans S^2 pour tout $n \geq 0$. Si $M(\delta)$ est le nombre donné par la condition (ii) du Lemme 6.1, nous avons donc $s_n \leq M(\delta)$ pour tout $n \geq 1$, d'où $s_0 < \infty$. Mais alors, $\{f_n \circ R(\gamma_n)(\Omega(s_n))\}$ converge vers $f_0 \circ R(\gamma_0)(\Omega(s_0))$. D'après le choix de s_n , $f_n \circ R(\gamma_n)(\Omega(s_n))$ n'est

pas ε -sinueux pour tout $n \geq 1$, donc il en est de même de $f_0 \circ R(\gamma_0)(\Omega(s_0))$, ce qui contredit la définition de $\zeta(C_0)$ puisque $s_0 \geq t_0 > \zeta(C_0)$.

Puisque ζ est semi-continue supérieurement, nous pouvons trouver [4, 4.3, p. 171] une fonction continue $\xi: a(D) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$(5) \quad \zeta(C) < \xi(C) \quad \text{pour tout } C \text{ dans } a(D).$$

Définissons alors $g: a(D) \rightarrow a(S^2)$ par

$$g(C) = f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(\xi(C))).$$

Il résulte de (5) et (3) que $\rho(g(C), h(C)) < \frac{1}{2}\alpha(C)$, d'où, d'après (2), $\rho(C, g(C)) < \alpha(C)$ pour tout C . D'après (1), cela entraîne que $g(C)$ est contenu dans D . Enfin, d'après (5) et (4), $g(C)$ est ε -sinueux pour tout C , donc g est la fonction cherchée de $a(D)$ dans $a(D) \setminus Z_\varepsilon$. Ceci achève de prouver l'affirmation 2, donc aussi le Théorème 1.1.

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 POUR LES SURFACES À BORD

Si M est une surface à bord, nous noterons ∂M son bord et $\overset{\circ}{M}$ son intérieur.

Nous avons besoin de deux lemmes.

7.1. Lemme. *Soit M une surface à bord. Il existe une homotopie $H: a(M) \times I \rightarrow a(M)$ vérifiant*

- (i) $H_0 = \text{id}$,
- (ii) $H_t(a(M)) \subset a(\overset{\circ}{M})$ pour tout $t > 0$,
- (iii) H est fermée au-dessus de $a(M) \setminus a(\overset{\circ}{M})$.

Démonstration. Ce lemme a été démontré dans [3, Lemme 7.3] pour l'espace $P(M)$ des pseudo-arcs de M ; le même argument s'applique à $a(M)$.

7.2. Lemme. *Soient X un espace appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ et A un ouvert de X . Supposons qu'il existe une homotopie $h: X \times I \rightarrow X$ vérifiant*

- (i) $h_0 = \text{id}$,
- (ii) $h_t(X) \subset A$ pour tout $t > 0$.
- (iii) h est fermée au-dessus de $X \setminus A$.

Alors, si A est une Σ^∞ -variété, X est homéomorphe à A .

Démonstration. Le rapporteur a fait remarquer que ce lemme se déduisait facilement du Théorème B.1 de [11]. La démonstration qui suit a cependant l'avantage de s'appliquer à toutes les variétés modelées sur un ensemble $\mathcal{E}$ -absorbant Ω (au sens de [2]), où $\mathcal{E}$ est une classes topologique additive héréditaire pour les fermés et les ouverts, même quand Ω ne vérifie pas les hypothèses du Théorème B.1 de [11].

Puisque A est un rétracte absolu de voisinage, l'existence de h entraîne que X en est un aussi (appliquer le Théorème 6.3, pp. 139–140 de [6]). Puisque l'inclusion de A dans X est évidemment une équivalence homotopique fine, il suffit (voir [2, §5]) de montrer que X vérifie les conditions (C1) et (C2) du Lemme 2.1.

Soient C un espace appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, E un fermé de C , $f: C \rightarrow X$ une fonction continue dont la restriction à E est un Z -plongement, et $\mathcal{U}$

un recouvrement ouvert de X . Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de X tel que $\text{St}(\mathcal{V})$ soit plus fin que $\mathcal{U}$. D'après le Lemme 1.1 de [2], nous pouvons trouver une fonction $k: C \rightarrow X$, $\mathcal{V}$ -proche de f , vérifiant (a) $k|E = f|E$, (b) $k(C \setminus E) \subset A$, et (c) k est fermée au-dessus de $X \setminus A$.

Pour x dans A , soit $\varepsilon_x = \frac{1}{4}d(x, X \setminus A)$; soit $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon_x)/x \in A\}$, et soit $\mathcal{V}_1$ un recouvrement ouvert de A plus fin que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{B}$. Soient $C' = C \setminus (E \cap f^{-1}(X \setminus A))$ et $E' = C' \cap E = E \cap f^{-1}(A)$. Puisque C' est ouvert dans C , il appartient à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$. De plus, $k(E') = f(E') = f(E) \cap A$ est un Z -ensemble dans A puisque A est ouvert dans X , et $k|E'$ est un plongement de E' sur $k(E')$. Puisque A est une Σ^∞ -variété, il a la propriété (C1), donc il existe un Z -plongement g' de C' dans A qui est $\mathcal{V}_1$ -proche de $k|C'$ et vérifie $g'|E' = k|E' = f|E'$. Définissons $g: C \rightarrow X$ par $g|C' = g'$ et $g(x) = k(x) = f(x)$ si $x \in C \setminus C' = E \setminus E'$.

Puisque g' est $\mathcal{V}_1$ -proche, donc $\mathcal{B}$ -proche, de $k|C'$, il est facile de voir que, pour toute suite $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ de points de C , $d(g(c_n), X \setminus A)$ tend vers zéro si, et seulement si, $d(k(c_n), X \setminus A)$ tend vers zéro et qu'alors $d(g(c_n), k(c_n))$ tend vers zéro. La continuité de g aux points de $C \setminus C'$ résulte de cette remarque et de la continuité de k . De plus, g est $\mathcal{V}$ -proche de k , donc $\mathcal{U}$ -proche de f , et vérifie $g|E = k|E = f|E$.

Puisque g envoie C' injectivement dans A et $C \setminus C'$ injectivement dans $X \setminus A$, elle est injective. Pour montrer que c'est un plongement fermé, il suffit de prouver que, si $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de points de C telle que $\{g(c_n)\}$ converge vers un point x de X , alors $\{c_n\}$ converge vers un point c_0 tel que $g(c_0) = x$. Si x appartient à A , alors $g(c_n)$ est dans A pour n assez grand, et l'existence de c_0 résulte du fait que g' est un plongement fermé de C' dans A . Si x appartient à $X \setminus A$, il résulte d'une remarque précédente que $\{k(c_n)\}$ tend aussi vers x . Puisque k est fermée au-dessus de $X \setminus A$, x appartient à l'image de k . Alors $k^{-1}(x)$ est réduit à un point x_0 de E et, puisque k est fermée au-dessus de $X \setminus A$, $\{c_n\}$ tend vers c_0 .

Soit $\mathcal{G}$ un recouvrement ouvert de X . Il est facile de construire une fonction continue $\beta: X \rightarrow]0, 1]$ telle que la fonction $\varphi: X \rightarrow A$ définie par $\varphi(x) = h(x, \beta(x))$ soit $\mathcal{G}$ -proche de id_X . Puisque $g'(C')$ est un Z -ensemble dans A , il y a une fonction continue ψ de A dans $A \setminus g'(C')$ qui est $\mathcal{G}$ -proche de id_A . Alors $\psi \circ \varphi$ est $\text{St}(\mathcal{G})$ -proche de id_X et envoie X dans $A \setminus g'(C') \subset X \setminus g(C)$. Ceci prouve que $g(C)$ est un Z -ensemble dans X , donc que X vérifie la condition (C1).

Puisque A est une Σ^∞ -variété, il vérifie la condition (C2), donc $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, où chaque A_n est un Z -ensemble au sens fort dans A . Posons $X_n = (X \setminus A) \cup A_n$. Alors $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ et, pour montrer que X vérifie la condition (C2), il suffit de prouver que, pour tout $n \geq 1$, le fermé X_n est un Z -ensemble au sens fort dans X . Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de X . Construisons une fonction continue $\beta: X \rightarrow]0, 1]$ telle que la fonction φ définie $\varphi(x) = h(x, \beta(x))$ soit $\mathcal{V}$ -proche de id_X . Puisque h est fermée au-dessus de $X \setminus A$ et que $\beta(x) > 0$ pour tout x , la fermeture L de $\varphi(X)$ est disjointe de $X \setminus A$. Nous pouvons donc trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de X , plus fin que $\mathcal{V}$ et tel qu'aucun élément de $\text{St}(\mathcal{W})$ ne rencontre à la fois L et $X \setminus A$. Puisque A_n est un Z -ensemble au sens fort dans A , il existe une fonction continue $\psi: A \rightarrow A$, $\mathcal{W}$ -proche de id_A , telle que la fermeture de $\psi(A)$ relativement à

A soit disjointe de A_n . Puisqu'aucun élément de $\text{St}(\mathcal{W})$ ne rencontre à la fois L et $X \setminus A$ et que ψ est $\mathcal{W}$ -proche de id_A , $\text{St}(X \setminus A, \mathcal{W})$ est un voisinage de $X \setminus A$ disjoint de $\psi(L)$. Soit $g = \psi \circ \varphi$; alors g est $\text{St}(\mathcal{V})$ -proche de id_X et $g(X) \subset \psi(L)$. Par suite, la fermeture de $g(X)$ relativement à X est disjointe de $X \setminus A$, donc est contenue dans la fermeture de $\psi(L)$ relativement à A ; elle est donc aussi disjointe de A_n . Nous avons donc $\overline{g(X)} \cap X_n = \emptyset$, ce qui montre que X_n est un Z -ensemble au sens fort dans X et achève de vérifier la condition (C2), donc aussi le lemme.

Démonstration du Théorème 7.1. D'après le Théorème 1.1, $a(\overset{\circ}{M})$ est homéomorphe à $\overset{\circ}{M} \times \Sigma^\infty$. Puisque M est homéomorphe à un fermé de $\overset{\circ}{M}$, $a(M)$ est homéomorphe à un fermé de $a(\overset{\circ}{M})$, donc appartient à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$. D'après les Lemmes 7.2 et 7.3, $a(M)$ et $a(\overset{\circ}{M})$ sont homéomorphes. Puisque M et $\overset{\circ}{M}$ ont le même type d'homotopie, $M \times \Sigma^\infty$ et $\overset{\circ}{M} \times \Sigma^\infty$ sont homéomorphes d'après le Lemme 2.5. Le théorème en résulte.

REFERENCES

1. M. Bestvina, P. Bowers, J. Mogilski and J. Walsh, *Characterization of Hilbert space manifolds revisited*, *Topology Appl.* **24** (1986), 53–69.
2. M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, *Michigan Math. J.* **33** (1986), 291–313.
3. R. Cauty, *L'espace des pseudo-arcs d'une surface*, *Trans. Amer. Math. Soc.* (à paraître).
4. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.
5. D. W. Henderson, *Z-sets in ANR's*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **213** (1975), 205–216.
6. S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich., 1965.
7. K. Kuratowski, *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, *Fund. Math.* **17** (1931), 249–272.
8. S. Mazurkiewicz, *Sur l'ensemble des continus péaniens*, *Fund. Math.* **17** (1931), 273–274.
9. S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Dekker, New York, 1978.
10. H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, *Fund. Math.* **111** (1981), 247–262.
11. —, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, *Fund. Math.* **125** (1985), 89–93.
12. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, vol. III, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1967.

UNIVERSITÉ PARIS VI, U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4, PLACE JUSSIEU,
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE
Current address: 22 rue Jouvenet, 75016, Paris, France