ERRATUM À “DUALITÉ DANS LE GROUPE DE GROTHENDIECK DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS LISSES DE LONGUEUR FINIE D’UN GROUPE RÉDUCTIF p -ADIQUE”

ANNE-MARIE AUBERT

Je remercie Guy Henniart et Marie-France Vignéras pour m’avoir signalé que la preuve de la proposition 3.2 de [A] est inexacte (je ne sais pas si cette proposition est vraie). La preuve dans [A] du théorème suivant ([A, th. 3.6]) utilise cette proposition et le but de cet erratum est de fournir une preuve différente de ce théorème. La démonstration présentée ici m’a été suggérée par Jean-Loup Waldspurger et je l’en remercie grandement.

Les notations non définies sont celles de [A]. Soit $I \subset S$. Nous désignons par $\text{Alg}(\{I\})$ la sous-catégorie abélienne de la catégorie des représentations lisses de G constituée par les représentations de G dont tout sous-quotient irréductible est sous-quotient d’une représentation induite $\mathbf{i}_{L_{v(I)}}^G(\text{Ad}(v)(\sigma))$, où σ est une représentation irréductible cuspidale du sous-groupe de Levi standard L_I de G et $v \in W$ est tel que $v(I) \subset S \cap \Phi^+$ (autrement dit, L_I et $L_{v(I)} = vL_Iv^{-1}$ sont des sous-groupes de Levi standard associés de G , et $\text{Alg}(\{I\})$ ne dépend que la classe d’association de L_I).

Théorème. *Pour tout E dans $\text{Alg}(\{I\})$, la suite*

$$(*) \quad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{|S|}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \tilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-1}} \bigoplus_{|J|=|S|-2} \tilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-2}} \dots \xrightarrow{d_{|I|}} \bigoplus_{|J|=|I|} \tilde{E}_J$$

est exacte.

Démonstration. Par définition de la catégorie $\text{Alg}(\{I\})$, l’exactitude de la suite (*) est équivalente à celle, pour tout I dans $\{I\}$, de la suite

$$0 \longrightarrow E_{U_I} \xrightarrow{d_{|S|,I}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \tilde{E}_{J,I} \xrightarrow{d_{|S|-1,I}} \bigoplus_{|J|=|S|-2} \tilde{E}_{J,I} \xrightarrow{d_{|S|-2,I}} \dots \xrightarrow{d_{|I|,I}} \bigoplus_{|J|=|I|} \tilde{E}_{J,I},$$

où $\tilde{E}_{J,I} = \mathbf{r}_{L_I}^G(\tilde{E}_J)$.

Soit $I \in \{I\}$ fixé. Pour $J \subset S$, le terme $\tilde{E}_{J,I}$ est filtré de la manière suivante. Notons Θ l’ensemble des parties θ de W telles que, si $w \in \theta$ et $l(w) < l(w')$, alors $w' \in \theta$. Soit $\Theta_J \subset \Theta$ l’ensemble des $\theta \in \Theta$ qui sont stables par multiplication à gauche par W_J . Pour tout $\theta \in \Theta_J$, nous posons $G_\theta := \bigcup_{w \in \theta} BwP_I$ et nous notons $\tilde{E}_J^\theta$ le sous-module de $\tilde{E}_J$ formé des éléments de $\tilde{E}_J$ à support compact contenu

Received by the editors April 11, 1996.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G40, 22E50.

dans G_θ . Pour θ élément quelconque de Θ , nous posons $\tilde{E}_J^\theta := \tilde{E}_J^{\theta'}$, où θ' est le plus grand élément de Θ_J contenu dans θ .

Si $\theta_1 \in \Theta$ et $\theta_2 \in \Theta$ sont telles que $\theta_1 \subset \theta_2$, on a $\tilde{E}_J^{\theta_1} \subset \tilde{E}_J^{\theta_2}$. Pour $f \in \tilde{E}_J^{\theta_2}$, nous notons $\text{Res}_{\theta_2-\theta_1}^{\theta_2}(f)$ la restriction de f à $G_{\theta_2-\theta_1}$. La suite

$$0 \longrightarrow \tilde{E}_J^{\theta_1} \longrightarrow \tilde{E}_J^{\theta_2} \xrightarrow{\text{Res}_{\theta_2-\theta_1}^{\theta_2}} \tilde{E}_J^{\theta_2-\theta_1} \longrightarrow 0$$

est exacte (voir par exemple [C, lem. 6.1.1.]); l'application $\text{Res}_{\theta_2-\theta_1}^{\theta_2}$ de $\tilde{E}_J^{\theta_2}/\tilde{E}_J^{\theta_1}$ dans $\tilde{E}_J^{\theta_2-\theta_1}$, définie par $\text{Res}_{\theta_2-\theta_1}^{\theta_2}(f + \tilde{E}_J^{\theta_1}) := \text{Res}_{\theta_2-\theta_1}^{\theta_2}(f)$ pour $f \in \tilde{E}_J^{\theta_2}$, est donc un isomorphisme.

Si $\theta_1 \subset \theta_2$ et $\theta'_1 \subset \theta'_2$ (éléments de Θ_J) vérifient $\theta_1 \subset \theta'_1$ et $\theta_2 \subset \theta'_2$ avec $\theta_2 - \theta_1 = \theta'_2 - \theta'_1$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_J^{\theta_2}/\tilde{E}_J^{\theta_1} & \xrightarrow{\text{Res}_{\theta_2-\theta_1}^{\theta_2}} & \tilde{E}_J^{\theta_2-\theta_1} \\ j \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ \tilde{E}_J^{\theta'_2}/\tilde{E}_J^{\theta'_1} & \xrightarrow{\text{Res}_{\theta'_2-\theta'_1}^{\theta'_2}} & \tilde{E}_J^{\theta'_2-\theta'_1} \end{array},$$

où $j(f + \tilde{E}_J^{\theta_1}) := f + \tilde{E}_J^{\theta'_1}$, pour $f \in \tilde{E}_J^{\theta_2}$.

S'il existe $w \in W$ de longueur minimale dans la double classe $W_J w W_I$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = W_J w$, on a $BW_J w P_I = P_J w P_I$ et l'application de $(\mathbf{i}_{L_J}^{P_J w P_I} \circ \mathbf{r}_{L_J}^G)(E)$ dans $(\mathbf{i}_{w^{-1}P_J w \cap P_I}^{P_I} \circ \text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{L_J}^G)(E)$ définie par $f \mapsto \Phi_f$ avec $\Phi_f(p) = f(wp)$ pour $p \in P_I$ est un isomorphisme ($\mathbf{i}$ désigne ici le foncteur induction à support compact normalisé).

Le groupe $w^{-1}P_J w \cap L_I$ est le sous-groupe parabolique standard de L_I associé à $w^{-1}(J) \cap I$, il a comme radical unipotent $w^{-1}U_J w \cap L_I$ et comme sous-groupe de Levi $w^{-1}L_J w \cap L_I$. Notons alors $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ l'application canonique de $E_{U_J} = \mathbf{r}_{L_J}^G(E)$ sur $(E_{U_J})_{U_J \cap w U_I w^{-1}} = \mathbf{r}_{w L_I w^{-1} \cap L_J}^{L_J}(E_{U_J})$. D'après [C, prop. 6.2.1 et 6.3.3] l'application de $(\mathbf{i}_{w^{-1}P_J w \cap P_I}^{P_I} \circ \text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{L_J}^G)(E)_{U_I}$ dans

$$(\mathbf{i}_{L_I \cap w^{-1}L_J w}^{L_I} \circ \text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1} \cap L_J}^{L_J})(\mathbf{r}_{L_J}^G(E))$$

qui à Φ_f associe

$$l \mapsto \int_{U_I \cap w^{-1}P_J w \setminus U_I} \overline{\Phi_f(ul)} d\mu(u)$$

est un isomorphisme. Mais, le terme $(\mathbf{i}_{L_I \cap w^{-1}L_J w}^{L_I} \circ \text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1} \cap L_J}^{L_J})(\mathbf{r}_{L_J}^G(E))$ est égal à $(\mathbf{i}_{L_I \cap w^{-1}L_J w}^{L_I} \circ \text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1} \cap L_J}^G)(E)$, par transitivité du foncteur $\mathbf{r}_{L_J}^G$ (voir par exemple [BZ, prop. 2.3 (c)]); comme E est dans la catégorie $\text{Alg}(\{I\})$, si $\mathbf{r}_{w L_I w^{-1} \cap L_J}^G(E)$ est non nul, il existe $v \in W$ tel que $w L_I w^{-1} \cap L_J = v L_I v^{-1}$, le groupe $v L_I v^{-1}$ est alors contenu dans (et par conséquent lui est égal) $w L_I w^{-1}$, il s'ensuit que $w L_I w^{-1}$ est alors contenu L_J et l'on a alors

$$(\mathbf{i}_{L_I \cap w^{-1}L_J w}^{L_I} \circ \text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1} \cap L_J}^G)(E) = (\text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1}}^G)(E).$$

Pour θ élément de Θ , nous notons $\tilde{E}_{J,I}$ l'image dans $\tilde{E}_{J,I}$ de $\tilde{E}_J^\theta$. Si $\theta_1 \subset \theta_2$, par exactitude du foncteur de Jacquet $\mathbf{r}_{L_I}^G$, on a $\tilde{E}_{J,I}^{\theta_2}/\tilde{E}_{J,I}^{\theta_1} = \tilde{E}_{J,I}^{\theta_2-\theta_1}$. Ce qui

précède montre que, s'il existe $w \in W$ de longueur minimale dans la double classe $W_J w W_I$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = W_J w$, et si $\tilde{E}_{J,I}^{\theta_2} / \tilde{E}_{J,I}^{\theta_1}$ est non nul, on a $w L_I w^{-1} \subset L_J$ et l'application

$$f \mapsto \left(l \mapsto \int_{U_I \cap w^{-1} P_J w \setminus U_I} \overline{f(wul)} d\mu(u) \right)$$

définit un isomorphisme de $((\mathbf{i}_{L_J}^{G_{W_J w}} \circ \mathbf{r}_{L_J}^G)(E))_{U_I}$ sur $(\text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1}}^G)(E)$.

Rappelons que, pour $K \subset J$, on note π_K^J la surjection canonique de E_{U_J} sur $E_{U_K} = E_{U_J} / E_{U_J}(U_K \cap L_J)$ et φ_K^J l'application de E_J dans E_K qui à f associe $g \mapsto \pi_K^J(f(g))$. Les applications de transition d_{k,U_I} étant des sommes avec signes d'applications φ_K^J , elles respectent la filtration par Θ , *i.e.*, pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $k \in \{1, \dots, |S|\}$, on a

$$d_{k,U_I} \left(\bigoplus_{|J|=k} \tilde{E}_{J,I}^\theta \right) \subset \bigoplus_{|J|=k-1} \tilde{E}_{J,I}^\theta.$$

Choisissons une suite $\theta_1 \supset \theta_2 \supset \dots \supset \theta_{t+1}$ d'éléments de Θ , telle que $\theta_1 = W$, $\theta_{t+1} = \emptyset$ et $\theta_i - \theta_{i+1} = w_i$ avec $w_i \in W$. Il suffit donc de prouver que, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, la suite des gradués

$$0 \longrightarrow E_{U_I}^{\theta_i} / E_{U_I}^{\theta_{i+1}} \xrightarrow{d_{|S|,I}^{\theta_i}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \tilde{E}_{J,I}^{\theta_i} / \tilde{E}_{J,I}^{\theta_{i+1}} \xrightarrow{d_{|S|-1,I}^{\theta_i}} \dots \xrightarrow{d_{|I|,I}^{\theta_i}} \bigoplus_{|J|=|I|} \tilde{E}_{J,I}^{\theta_i} / \tilde{E}_{J,I}^{\theta_{i+1}}$$

est exacte. Fixons i et posons $w := w_i$. Notons θ'_i (resp. θ'_{i+1}) le plus grand élément de Θ_J qui est contenu dans θ_i (resp. θ_{i+1}). Supposons $\tilde{E}_{J,I}^{\theta_i} / \tilde{E}_{J,I}^{\theta_{i+1}}$ est non nul. Alors θ'_i et θ'_{i+1} sont distincts et la classe à gauche $W_J w$ est donc contenue dans θ_i . Par définition des ensembles θ , les éléments de θ_{i+1} (et donc de θ_i) sont de longueur inférieure à la longueur de w ; par conséquent l'inclusion $W_J w \subset \theta_i$ montre que w est de longueur minimale dans $W_J w$, autrement dit, que $w^{-1}\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in J$. D'autre part, il résulte de ce qui précède que $w W_I w^{-1}$ est contenu dans W_J (car E appartient à $\text{Alg}(\{I\})$) et que $\tilde{E}_{J,I}^{\theta_i} / \tilde{E}_{J,I}^{\theta_{i+1}}$ est isomorphe à $(\text{Ad}(w^{-1}) \circ \mathbf{r}_{w L_I w^{-1}}^G)(E)$. Puisque w est de longueur minimale dans $W_J w$, il est donc aussi de longueur minimale dans $w W_I$. Il s'ensuit que l'ensemble $w(I)$ est formé de racines simples et est contenu dans J . On est ramené à montrer que la suite

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{|J|=k \\ w(I) \subset J \subset S^w}} \text{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{w L_I w^{-1}}^G E) \xrightarrow{\delta_k} \bigoplus_{\substack{|J|=k-1 \\ w(I) \subset J \subset S^w}} \text{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{w L_I w^{-1}}^G E) \xrightarrow{\delta_{k-1}} \dots$$

(où $S^w := S_{w^{-1}} = \{\alpha \in S \mid w^{-1}\alpha > 0\}$, notation de [A, p. 2182]) est exacte. Il résulte de la transitivité du foncteur $\mathbf{r}_L^G$ (voir par exemple [BZ, prop. 2.3 (c)]) que, pour I, J et K des parties de S telles que $w(I) \subset J$ et $w(I) \subset K \subset J$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E_{U_J} & \xrightarrow{\pi_{w(I)}^J} & E_{U_{w(I)}} \\ \pi_K^J \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ E_{U_K} & \xrightarrow{\pi_{w(I)}^K} & E_{U_{w(I)}} \end{array}$$

La construction de l'isomorphisme de $\tilde{E}_{J,I}^{\theta_i}/\tilde{E}_{J,I}^{\theta_{i+1}}$ sur $\mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_I w^{-1}}^G E)$ montre alors que les applications de transitions δ_k sont l'identité de $\mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_I w^{-1}}^G E)$ multipliée par le signe qu'il faut. La suite ci-dessus est donc le produit tensoriel de $\mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_I w^{-1}}^G E)$ et du complexe de Koszul $\Lambda(\mathbb{C}^{S^w - w(I)})$ translaté de $|S| - |S^w|$. Il est bien connu que ce complexe est acyclique sauf si $S^w = w(I)$ (voir par exemple [S, chap. IV.A]). Mais si $S^w = w(I)$, la suite se réduit à

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathbf{r}_{wL_I w^{-1}}^G E),$$

qui est encore exacte. $\square$

Remarques. (1) Si $w \in W$ est tel que $w(I) \subset \Phi^+$ et $S^w = w(I)$, alors $w(S - I) \subset -\Phi^+$ (voir [A, bas de la page 2182]) et, par conséquent, w^{-1} est égal à l'élément de plus grande longueur dans $\mathcal{D}(I, \emptyset)$, élément noté w_I dans [A].

Nous désignons par $\tilde{D}_G$ l'application qui à $E \in \mathrm{Alg}(\{I\})$ associe le conoyau $E^\#$ de l'application $d_{|I|}$. Pour tout $E \in \mathrm{Alg}(\{I\})$, on a $\tilde{D}_{L_I}(\mathbf{r}_{L_I}^G(E)) = \mathbf{r}_{L_I}^G(E)$. Le calcul précédent, appliqué au dernier cran, calcule $(\tilde{D}_G(E))_{U_I} = (\mathbf{r}_{L_I}^G \circ \tilde{D}_G)(E)$:

$$(**) \quad (\mathbf{r}_{L_I}^G \circ \tilde{D}_G)(E) = (\mathrm{Ad}(w_I) \circ \tilde{D}_{L_{I'}} \circ \mathbf{r}_{L_{I'}}^G)(E), \text{ pour tout } E \in \mathrm{Alg}(\{I\}),$$

où $I' = w_I^{-1}(I)$.

L'égalité $(**)$ et le fait que $[\tilde{D}_G(E)] = (-1)^{|I|} D_G([E])$ (voir [A, cor. 3.9 (a)]) montrent que $(\mathbf{r}_{L_I}^G \circ D_G)(E) = (\mathrm{Ad}(w_I) \circ D_{L_{I'}} \circ \mathbf{r}_{L_{I'}}^G)(E)$, égalité qui est un cas particulier de [A, th. 1.7 (2)].

(2) J. Bernstein a aussi annoncé le théorème prouvé ici (colloque Luminy 1994). Dans le cas des représentations lisses de longueur finie une preuve de nature différente de notre théorème figure dans [P. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building*, Prépublication 1995, section IV §5].

REFERENCES

- [A] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p -adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2179–2189. MR **91i**:22025
- [B] J.N. Bernstein (rédigé par P. Deligne), *Le “centre” de Bernstein*, Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984. MR **86e**:22028
- [BZ] J.N. Bernstein et A. Zelevinski, *Induced representations of reductive p -adic groups I*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. **10** (1977), 441–472. MR **58**:28310
- [C] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups*, Prépublication 1974 (Nouvelle version Mai 1995).
- [S] J.-P. Serre (Cours au Collège de France 1957–1958, rédigé par P. Gabriel), *Algèbre Locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer (deuxième édition), Berlin–Heidelberg–New-York, 1965. MR **34**:1352

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, L.M.E.N.S.–D.M.I. (C.N.R.S. U.R.A. 762), 45 RUE D'ULM,
F-75005 PARIS, FRANCE

E-mail address: aubert@dma.ens.fr